2016年4月14日(木) 作成
2016年5月1日(日) 修正

# RIETVELD の非対称ガウシアン

名古屋工業大学先進セラミックス研究センター
井田隆

[H. M. Rietveld, “A Profile Refinement Method for Nuclear and Magnetic Structures”, J. Appl. Crystallogr. 2, 65–71 (1969)]

上記文献で提案されている非対称化 Gaussian 関数の反射ピーク形状モデルについて考える。このモデルでは

$$f_{\mathrm{R}}\left(x;x_{\mathrm{R}},b_{\mathrm{R}},p_{\mathrm{R}}\right)=N_{\mathrm{R}}\exp\left[-b_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2\right]\begin{Bmatrix} 1-p_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2 & \left[x\le x_{\mathrm{R}}\right] \\ 1+p_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2 & \left[x_{\mathrm{R}}<x\right] \end{Bmatrix}$$

と表現されている。$p_{\mathrm{R}}$ は非対称パラメータである。この形式では低角度ピークの高角側の裾が負の値をとってしまうことになるが，このことを気にしなければ

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{\mathrm{R}}\left(x;x_{\mathrm{R}},b_{\mathrm{R}},p_{\mathrm{R}}\right)}{N_{\mathrm{R}}}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{x_{\mathrm{R}}}\left[\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2}-p_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &\quad+\int_{x_{\mathrm{R}}}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2}+p_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &=\int_{-\infty}^{0}\left(\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}y^2}-p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}y^2}\right)\mathrm{d}y+\int_{0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}y^2}+p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}y^2}\right)\mathrm{d}y \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}y^2}\,\mathrm{d}y-p_{\mathrm{R}}\int_{-\infty}^{0}y^2\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}y^2}\,\mathrm{d}y+p_{\mathrm{R}}\int_{0}^{\infty}y^2\mathrm{e}^{-b_{\mathrm{R}}y^2}\,\mathrm{d}y \\ &=\sqrt{\frac{\pi}{b_{\mathrm{R}}}}\end{aligned}$$

となる。したがって，$N_{\mathrm{R}}=\sqrt{\dfrac{b_{\mathrm{R}}}{\pi}}$ とすれば規格化される。少し形式を変えた等価な形式として，

$$f_{\mathrm{R}}\left(x;x'_{\mathrm{R}},\sigma'_{\mathrm{R}},p_{\mathrm{R}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\exp\left[-\frac{\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]\begin{Bmatrix} 1-p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}} & \left[x\le x'_{\mathrm{R}}\right] \\ 1+p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}} & \left[x'_{\mathrm{R}}<x\right] \end{Bmatrix}$$

とすれば，平均は $x'_{\mathrm{R}}$ に近い値になり，標準偏差は $\sigma'_{\mathrm{R}}$ に近い値になるはずである。
まず，このモデルの平均位置について考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\mathrm{R}}\left(x;x'_{\mathrm{R}},\sigma'_{\mathrm{R}},p_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{-\infty}^{x'_{\mathrm{R}}}x\left[\mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}-\frac{p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]\mathrm{d}x$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{x'_{\mathrm{R}}}^{\infty} x\left[\mathrm{e}^{-(x-x'_{\mathrm{R}})^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}+\frac{p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\mathrm{e}^{-(x-x'_{\mathrm{R}})^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]\mathrm{d}x
$$

$$
\underset{\substack{\uparrow\\ x-x_{\mathrm{R}}\equiv y\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}y}}{=}\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{-\infty}^{0}\left(y+x'_{\mathrm{R}}\right)\left(\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}-\frac{p_{\mathrm{R}}y^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right)\mathrm{d}y
$$

$$
\begin{array}{lllllll} x & : & -\infty & \rightarrow & x_{\mathrm{R}} & \rightarrow & \infty \\ y & : & -\infty & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \infty \end{array}
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{0}^{\infty}\left(y+x'_{\mathrm{R}}\right)\left(\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}+\frac{p_{\mathrm{R}}y^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right)\mathrm{d}y
$$

$$
\underset{\uparrow}{=}\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(y+x'_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y-\frac{p_{\mathrm{R}}}{2\sqrt{2\pi}\sigma'^3_{\mathrm{R}}}\int_{-\infty}^{0}\left(y+x'_{\mathrm{R}}\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y
$$

$$
\int_0^{\infty}\cdots\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\cdots\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\mathrm{d}y
$$

$$
\int_0^{\infty}f(|y|)\,\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{0}\left[-f(|y|)\right]\mathrm{d}y=2\int_0^{\infty}f(|y|)\,\mathrm{d}y
$$

$$
+\frac{p_{\mathrm{R}}}{2\sqrt{2\pi}\sigma'^3_{\mathrm{R}}}\int_{0}^{\infty}\left(y+x'_{\mathrm{R}}\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y
$$

$$
\underset{\uparrow}{=}\quad \frac{x'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y+\frac{p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2\pi}\sigma'^3_{\mathrm{R}}}\int_{0}^{\infty}y^3\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty}y\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y=0
$$

$$
\underset{\uparrow}{=}\quad x'_{\mathrm{R}}+\frac{p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2\pi}\sigma'^3_{\mathrm{R}}}\left\{\left[-\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]_0^{\infty}+2\sigma'^2_{\mathrm{R}}\int_0^{\infty}y\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y\right\}
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y=1
$$

$$
\int_0^{\infty}y^3\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y=\left[-\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]_0^{\infty}+2\sigma'^2_{\mathrm{R}}\int_0^{\infty}y\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y
$$

$$
\underset{\uparrow}{=}\quad x'_{\mathrm{R}}+\frac{2p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_0^{\infty}y\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}y
$$

$$
\left[-\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]_0^{\infty}=0
$$

$$
=x'_{\mathrm{R}}+\frac{2p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\left[-\sigma'^2_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]_0^{\infty}=x'_{\mathrm{R}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}
$$

平均位置は非対称パラメータがゼロ（$p_{\mathrm{R}}=0$）のときに $x'_{\mathrm{R}}$ と一致し，$p_{\mathrm{R}}$ に比例してシフトするという挙動は，定性的にこのプロファイルの性格を再現できている。

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると，

$$
x'_{\mathrm{R}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}=-0.0398942
$$

$$
\sum_{j=-3000}^{3000}\frac{j}{1000}f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)=-0.0398942
$$

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.2$ とすると，

$$
x'_{\mathrm{R}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}=-0.0797885
$$

$$\sum_{j=-3000}^{3000}\frac{j}{1000}f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.2\right)=-0.0797885$$

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.25$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると，

$$x'_{\mathrm{R}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}=-0.0398942$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\frac{j}{1000}f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.25,p_{\mathrm{R}}=-0.2\right)=-0.0398942$$

となる。OK！（平均ピーク位置を表す数式は，数値計算の結果と一致している）

二乗平均は

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_{\mathrm{R}}\left(x;x'_{\mathrm{R}},\sigma'_{\mathrm{R}},p_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{-\infty}^{x'_{\mathrm{R}}}x^2\left[\mathrm{e}^{-(x-x'_{\mathrm{R}})^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}-\frac{p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\mathrm{e}^{-(x-x'_{\mathrm{R}})^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{x'_{\mathrm{R}}}^{\infty}x^2\left[\mathrm{e}^{-(x-x'_{\mathrm{R}})^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}+\frac{p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\mathrm{e}^{-(x-x'_{\mathrm{R}})^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]\mathrm{d}x$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ (x-x'_{\mathrm{R}})/\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}\equiv y\\ \mathrm{d}x=\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}y\\ x\ :\ -\infty\ \to\ x'_{\mathrm{R}}\ \to\ \infty\\ y\ :\ -\infty\ \to\ 0\ \to\ \infty}}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}y+x'_{\mathrm{R}}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-y^2}-p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}y+x'_{\mathrm{R}}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-y^2}+p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(2\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2+2\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)\left(\mathrm{e}^{-y^2}-p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(2\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2+2\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)\left(\mathrm{e}^{-y^2}+p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(2\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2+2\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y-\frac{p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(2\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2+2\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(2\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2+2\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y+\frac{p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(2\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2+2\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2+x'^2_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^3\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y+x^2_{\mathrm{R}}+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[-\frac{y^2}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right\}$$

$$=\frac{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[-\frac{y}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right\}+x'^2_{\mathrm{R}}+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left(0+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)+x^2_{\mathrm{R}}+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\right]_0^{\infty}$$

$$=\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}+x_{\mathrm{R}}^{2}+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}'\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}+x_{\mathrm{R}}^{2}+\frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}'\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}$$

かりに $x_{\mathrm{R}}'=0$ , $\sigma_{\mathrm{R}}'=0.5$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると，

$$\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}+x_{\mathrm{R}}^{2}+\frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}'\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}=0.25$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}\right)^{2}f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x_{\mathrm{R}}'=0,\sigma_{\mathrm{R}}'=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)=0.25$$

かりに $x_{\mathrm{R}}'=0.1$ , $\sigma_{\mathrm{R}}'=0.5$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると，

$$\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}+x_{\mathrm{R}}^{2}+\frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}'\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}=0.252021$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}\right)^{2}f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x_{\mathrm{R}}'=1,\sigma_{\mathrm{R}}'=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)=0.252021$$

かりに $x_{\mathrm{R}}'=0.1$ , $\sigma_{\mathrm{R}}'=0.25$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると，

$$\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}+x_{\mathrm{R}}^{2}+\frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}'\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}=0.0685106$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}\right)^{2}f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x_{\mathrm{R}}'=0.1,\sigma_{\mathrm{R}}'=0.25,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)=0.0685106$$

となる。OK！（二乗平均を表す式に数値をあてはめると，数値計算の結果と一致する）

したがって分散は

$$\sigma_{\mathrm{R}}^{2}=\left(\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}+x_{\mathrm{R}}'^{2}+\frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}'\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}\right)-\left(x_{\mathrm{R}}'+\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'\right)^{2}$$

$$=\left(\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}+x_{\mathrm{R}}^{2}+\frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}'\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}\right)-\left(x_{\mathrm{R}}^{2}+2x_{\mathrm{R}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'+\frac{2}{\pi}p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}\right)$$

$$=\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}-\frac{2}{\pi}p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}$$

$$=\left(1-\frac{2}{\pi}p_{\mathrm{R}}^{2}\right)\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}$$

となる。分散を表す式はピーク位置の影響を受けないはずだから， $x_{\mathrm{R}}'$ が消えて $\sigma_{\mathrm{R}}'$ と $p_{\mathrm{R}}$ だけの式になっていることはつじつまがあっている。

また，標準偏差は

$$\sigma_{\mathrm{R}}=\sqrt{1-\frac{2}{\pi}p_{\mathrm{R}}^{2}}\sigma_{\mathrm{R}}'$$

となる。

３乗平均は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_{\mathrm{R}}\left(x;x'_{\mathrm{R}},\sigma'_{\mathrm{R}},p_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{-\infty}^{x'_{\mathrm{R}}} x^3\left[\mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}} - \frac{p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]\mathrm{d}\,x$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}}\int_{x'_{\mathrm{R}}}^{\infty} x^3\left[\mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}} + \frac{p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}}\right]\mathrm{d}\,x$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)/\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}\equiv y \\ \mathrm{d}\,x=\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}\,y \\ x\ :\ -\infty\ \to\ x'_{\mathrm{R}}\ \to\ \infty \\ y\ :\ -\infty\ \to\ 0\ \to\ \infty}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}y+x'_{\mathrm{R}}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-y^2}-p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}\,y$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}y+x'_{\mathrm{R}}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-y^2}+p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}\,y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(2\sqrt{2}\sigma'^3_{\mathrm{R}}y^3+6\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2x'_{\mathrm{R}}+3\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'^2_{\mathrm{R}}+x'^3_{\mathrm{R}}\right)\left(\mathrm{e}^{-y^2}-p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}\,y$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(2\sqrt{2}\sigma'^3_{\mathrm{R}}y^3+6\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2x'_{\mathrm{R}}+3\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'^2_{\mathrm{R}}+x'^3_{\mathrm{R}}\right)\left(\mathrm{e}^{-y^2}+p_{\mathrm{R}}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}\,y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(6\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2x'_{\mathrm{R}}+x'^3_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y-\frac{p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(2\sqrt{2}\sigma'^3_{\mathrm{R}}y^3+3\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'^2_{\mathrm{R}}\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(6\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2x'_{\mathrm{R}}+x'^3_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y+\frac{p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(2\sqrt{2}\sigma'^3_{\mathrm{R}}y^3+3\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}yx'^2_{\mathrm{R}}\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\frac{x'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(6\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2+x'^2_{\mathrm{R}}\right)\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y+\frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(2\sigma'^2_{\mathrm{R}}y^2+3x'^2_{\mathrm{R}}\right)y^3\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\frac{6\sigma'^2_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y+\frac{x'^3_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^5\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y+\frac{6\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}x'^2_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^3\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\frac{6\sigma'^2_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)+x'^3_{\mathrm{R}}+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}(2)\int_{0}^{\infty}y^3\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y+\frac{6\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}x'^2_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^3\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=3\sigma'^2_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}+x'^3_{\mathrm{R}}+\frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma'^2_{\mathrm{R}}+3x'^2_{\mathrm{R}}\right)\int_{0}^{\infty}y^3\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=3\sigma'^2_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}+x'^3_{\mathrm{R}}+\frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma'^2_{\mathrm{R}}+3x'^2_{\mathrm{R}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=x'_{\mathrm{R}}\left(3\sigma'^2_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)+\frac{\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma'^2_{\mathrm{R}}+3x'^2_{\mathrm{R}}\right)$$

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると，

$$x'_{\mathrm{R}}\left(3\sigma'^2_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)+\frac{\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma'^2_{\mathrm{R}}+3x'^2_{\mathrm{R}}\right)=-0.0398942$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}\right)^3 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)=-0.039842$$

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0.1$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると，

$$x'_{\mathrm{R}}\left(3\sigma'^2_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)+\frac{\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma'^2_{\mathrm{R}}+3x'^2_{\mathrm{R}}\right)=0.0349089$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}\right)^3 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=1,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)=0.0349089$$

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0.1$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.25$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると，

$$x'_{\mathrm{R}}\left(3\sigma'^2_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)+\frac{\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma'^2_{\mathrm{R}}+3x'^2_{\mathrm{R}}\right)=0.0141648$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}\right)^3 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0.1,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.25,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)=0.0141648$$

となる。OK !

３次モーメントは

$$\begin{aligned}
&x'_{\mathrm{R}}\left(3\sigma'^2_{\mathrm{R}}+x'^2_{\mathrm{R}}\right)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}\left(4\sigma'^2_{\mathrm{R}}+3x'^2_{\mathrm{R}}\right)\\
&-3\left(\sigma'^2_{\mathrm{R}}+x^2_{\mathrm{R}}+2\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}\right)\left(x'_{\mathrm{R}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}\right)+2\left(x'_{\mathrm{R}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=3x'_{\mathrm{R}}\sigma'^2_{\mathrm{R}}+x'^3_{\mathrm{R}}+4\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}+3\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}x'^2_{\mathrm{R}}\\
&-\left(3x'_{\mathrm{R}}\sigma'^2_{\mathrm{R}}+3x^3_{\mathrm{R}}+6\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}x^2_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}\right)-\left(3\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}+3\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}x^2_{\mathrm{R}}+\frac{12}{\pi}p^2_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}\sigma'^2_{\mathrm{R}}\right)\\
&+\left(2x^3_{\mathrm{R}}+6x^2_{\mathrm{R}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}+\frac{12}{\pi}x'_{\mathrm{R}}p^2_{\mathrm{R}}\sigma'^2_{\mathrm{R}}+\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}p^3_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=4\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}+3\sigma'^2_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}+3\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}x'^2_{\mathrm{R}}+x'^3_{\mathrm{R}}\\
&-3\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}-3\sigma'^2_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}-\frac{12}{\pi}p^2_{\mathrm{R}}\sigma'^2_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}-6\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}x^2_{\mathrm{R}}-3\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}x^2_{\mathrm{R}}-3x^3_{\mathrm{R}}\\
&+\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}p^3_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}+\frac{12}{\pi}p^2_{\mathrm{R}}\sigma'^2_{\mathrm{R}}x'_{\mathrm{R}}+6\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}}x^2_{\mathrm{R}}+2x^3_{\mathrm{R}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}+\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}p^3_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}\left(1+\frac{4}{\pi}p^2_{\mathrm{R}}\right)
\end{aligned}$$

したがって歪度は

$$\chi_{\mathrm{R}}=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}}\left(1+\frac{4}{\pi}p^2_{\mathrm{R}}\right)}{\left(\sqrt{1-\frac{2}{\pi}p^2_{\mathrm{R}}}\sigma'_{\mathrm{R}}\right)^3}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_{\mathrm{R}}\left(1+\frac{4}{\pi}p^2_{\mathrm{R}}\right)\left(1-\frac{2}{\pi}p^2_{\mathrm{R}}\right)^{-3/2}$$

となる。

4 乗平均は

$$
\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_{\mathrm{R}}\left(x; x'_{\mathrm{R}}, \sigma'_{\mathrm{R}}, p_{\mathrm{R}}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}} \int_{-\infty}^{x'_{\mathrm{R}}} x^4 \left[ \mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}} - \frac{p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}} \mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}} \right] \mathrm{d}x
$$

$$
+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_{\mathrm{R}}} \int_{x'_{\mathrm{R}}}^{\infty} x^4 \left[ \mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}} + \frac{p_{\mathrm{R}}\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2}{2\sigma'^2_{\mathrm{R}}} \mathrm{e}^{-\left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)^2/2\sigma'^2_{\mathrm{R}}} \right] \mathrm{d}x
$$

$$
\underset{\substack{\uparrow \\ \left(x-x'_{\mathrm{R}}\right)/\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}} \equiv y \\ \mathrm{d}x = \sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}y \\ x\ :\ -\infty\ \to\ x'_{\mathrm{R}}\ \to\ \infty \\ y\ :\ -\infty\ \to\ 0\ \to\ \infty}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \left(\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}} y + x'_{\mathrm{R}}\right)^4 \left(\mathrm{e}^{-y^2} - p_{\mathrm{R}} y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\right) \mathrm{d}y
$$

$$
+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}} y + x'_{\mathrm{R}}\right)^4 \left(\mathrm{e}^{-y^2} + p_{\mathrm{R}} y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\right) \mathrm{d}y
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \left(4\sigma'^4_{\mathrm{R}} y^4 + 8\sqrt{2}\sigma'^3_{\mathrm{R}} y^3 x'_{\mathrm{R}} + 12\sigma'^2_{\mathrm{R}} y^2 x'^2_{\mathrm{R}} + 4\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}} y x'^3_{\mathrm{R}} + x'^4_{\mathrm{R}}\right) \left(\mathrm{e}^{-y^2} - p_{\mathrm{R}} y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\right) \mathrm{d}y
$$

$$
+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \left(4\sigma'^4_{\mathrm{R}} y^4 + 8\sqrt{2}\sigma'^3_{\mathrm{R}} y^3 x'_{\mathrm{R}} + 12\sigma'^2_{\mathrm{R}} y^2 x'^2_{\mathrm{R}} + 4\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}} y x'^3_{\mathrm{R}} + x'^4_{\mathrm{R}}\right) \left(\mathrm{e}^{-y^2} + p_{\mathrm{R}} y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\right) \mathrm{d}y
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \left(4\sigma'^4_{\mathrm{R}} y^4 + 12\sigma'^2_{\mathrm{R}} y^2 x'^2_{\mathrm{R}} + x'^4_{\mathrm{R}}\right) \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \left(8\sqrt{2}\sigma'^3_{\mathrm{R}} y^3 x'_{\mathrm{R}} + 4\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}} y x'^3_{\mathrm{R}}\right) y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y
$$

$$
+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \left(4\sigma'^4_{\mathrm{R}} y^4 + 12\sigma'^2_{\mathrm{R}} y^2 x'^2_{\mathrm{R}} + x'^4_{\mathrm{R}}\right) \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y
$$

$$
+ \frac{p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \left(8\sqrt{2}\sigma'^3_{\mathrm{R}} y^3 x'_{\mathrm{R}} + 4\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}} y x'^3_{\mathrm{R}}\right) y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y
$$

$$
= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \left(4\sigma'^4_{\mathrm{R}} y^4 + 12\sigma'^2_{\mathrm{R}} y^2 x'^2_{\mathrm{R}} + x'^4_{\mathrm{R}}\right) \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{2p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \left(8\sqrt{2}\sigma'^3_{\mathrm{R}} y^3 x'_{\mathrm{R}} + 4\sqrt{2}\sigma'_{\mathrm{R}} y x'^3_{\mathrm{R}}\right) y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y
$$

$$
= \frac{8\sigma'^4_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} y^4 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{24\sigma'^2_{\mathrm{R}} x'^2_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{2x'^4_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y
$$

$$
+ \frac{16\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'^3_{\mathrm{R}} x'_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} y^5 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{8\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma'_{\mathrm{R}} x'^3_{\mathrm{R}}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} y^3 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y
$$

ここで,

$$
\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

$$
\int_{0}^{\infty} y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{y}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{4}
$$

$$
\int_{0}^{\infty} y^4 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{y^3}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\right]_0^{\infty} + \frac{3}{2}\int_{0}^{\infty} y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}
$$

$$
\int_{0}^{\infty} y \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}
$$

$$\int_0^\infty y^3 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{y^2}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty y^5 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{y^4}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty y^3\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = 1$$

から，４乗平均は

$$\frac{8\sigma_{\mathrm{R}}'^4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty y^4\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{24\sigma_{\mathrm{R}}'^2 x_{\mathrm{R}}'^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{2x_{\mathrm{R}}'^4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$+\frac{16\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^3 x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty y^5\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{8\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'^3}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty y^3\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{8\sigma_{\mathrm{R}}'^4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\right) + \frac{24\sigma_{\mathrm{R}}'^2 x_{\mathrm{R}}'^2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) + \frac{2x_{\mathrm{R}}'^4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + \frac{16\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^3 x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}} + \frac{8\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'^3}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3\sigma_{\mathrm{R}}'^4 + 6\sigma_{\mathrm{R}}'^2 x_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^4 + \frac{16\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^3 x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'^3}{\sqrt{\pi}}$$

$$= 3\sigma_{\mathrm{R}}'^4 + 6\sigma_{\mathrm{R}}'^2 x_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^4 + \frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^2\right)$$

かりに $x_{\mathrm{R}}' = 0$ , $\sigma_{\mathrm{R}}' = 0.5$ , $p_{\mathrm{R}} = -0.1$ とすると，

$$3\sigma_{\mathrm{R}}'^4 + 6\sigma_{\mathrm{R}}'^2 x_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^4 + \frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^2\right) = 0.1875$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}\right)^4 f_{\mathrm{R}}\left(x = \frac{j}{1000}; x_{\mathrm{R}}' = 0, \sigma_{\mathrm{R}}' = 0.5, p_{\mathrm{R}} = -0.1\right) = 0.1875$$

かりに $x_{\mathrm{R}}' = 0.1$ , $\sigma_{\mathrm{R}}' = 0.5$ , $p_{\mathrm{R}} = -0.1$ とすると，

$$3\sigma_{\mathrm{R}}'^4 + 6\sigma_{\mathrm{R}}'^2 x_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^4 + \frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^2\right) = 0.186483$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}\right)^4 f_{\mathrm{R}}\left(x = \frac{j}{1000}; x_{\mathrm{R}}' = 1, \sigma_{\mathrm{R}}' = 0.5, p_{\mathrm{R}} = -0.1\right) = 0.186483$$

かりに $x_{\mathrm{R}}' = 0.1$ , $\sigma_{\mathrm{R}}' = 0.25$ , $p_{\mathrm{R}} = -0.1$ とすると，

$$3\sigma_{\mathrm{R}}'^4 + 6\sigma_{\mathrm{R}}'^2 x_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^4 + \frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^2\right) = 0.0134943$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}\right)^4 f_{\mathrm{R}}\left(x = \frac{j}{1000}; x_{\mathrm{R}}' = 0.1, \sigma_{\mathrm{R}}' = 0.25, p_{\mathrm{R}} = -0.1\right) = 0.0134943$$

となる。４乗平均はOK！

ここまでをまとめると，平均，２乗平均，３乗平均，４乗平均は

$$\langle x\rangle = x_{\mathrm{R}}' + \frac{\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}$$

$$\langle x^2\rangle = \sigma_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^2 + \frac{2\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}'\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}$$

$$\langle x^3\rangle = x_{\mathrm{R}}'\left(3\sigma_{\mathrm{R}}'^2 + x_{\mathrm{R}}'^2\right) + \frac{\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma_{\mathrm{R}}'^2 + 3x_{\mathrm{R}}'^2\right)$$

$$\left\langle x^4 \right\rangle = 3\sigma_R'^4 + 6\sigma_R'^2 x_R'^2 + x_R'^4 + \frac{4\sqrt{2}\,p_R \sigma_R' x_R'}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma_R'^2 + x_R'^2\right)$$

４次モーメントは

$$\begin{aligned}
&\left\langle x^4\right\rangle - 4\left\langle x^3\right\rangle\left\langle x\right\rangle + 6\left\langle x^2\right\rangle\left\langle x\right\rangle^2 - 3\left\langle x\right\rangle^4 \left\langle x^3\right\rangle\\
&\left[3\sigma_R'^4 + 6\sigma_R'^2 x_R'^2 + x_R'^4 + \frac{4\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma_R'^2 + x_R'^2\right)\right]\\
&\qquad -4\left[x_R'\left(3\sigma_R'^2 + x_R'^2\right) + \frac{\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'}{\sqrt{\pi}}\left(4\sigma_R'^2 + 3x_R'^2\right)\right]\left(x_R' + \frac{\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'}{\sqrt{\pi}}\right)\\
&\qquad +6\left(\sigma_R'^2 + x_R^2 + \frac{2\sqrt{2}\,p_R x_R'\sigma_R'}{\sqrt{\pi}}\right)\left(x_R' + \frac{\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'}{\sqrt{\pi}}\right)^2\\
&\qquad -3\left(x_R' + \frac{\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'}{\sqrt{\pi}}\right)^4\\
&=\left(3\sigma_R'^4 + 6\sigma_R'^2 x_R'^2 + x_R'^4 + \frac{16\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'^3 x_R'}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'^3}{\sqrt{\pi}}\right)\\
&\qquad -4\left(3\sigma_R'^2 x_R' + x_R'^3 + \frac{4\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'^3}{\sqrt{\pi}} + \frac{3\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'^2}{\sqrt{\pi}}\right)x_R'\\
&\qquad -4\left(3\sigma_R'^2 x_R' + x_R'^3 + \frac{4\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'^3}{\sqrt{\pi}} + \frac{3\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'^2}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'}{\sqrt{\pi}}\\
&\qquad +6\left(\sigma_R'^2 + x_R^2 + \frac{2\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'}{\sqrt{\pi}}\right)\left(x_R'^2 + \frac{2\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'}{\sqrt{\pi}} + \frac{2p_R^2\sigma_R'^2}{\pi}\right)\\
&\qquad -3\left(x_R'^4 + 4x_R'^3\frac{\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'}{\sqrt{\pi}} + 6x_R'^2\frac{2p_R^2\sigma_R'^2}{\pi} + 4x_R'\frac{2\sqrt{2}\,p_R^3\sigma_R'^3}{\pi\sqrt{\pi}} + \frac{4p_R^4\sigma_R'^4}{\pi^2}\right)\\
&=\left(3\sigma_R'^4 + 6\sigma_R'^2 x_R'^2 + x_R'^4 + \frac{16\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'^3 x_R'}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'^3}{\sqrt{\pi}}\right)\\
&\qquad -\left(12\sigma_R'^2 x_R'^2 + 4x_R'^4 + \frac{16\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'^3 x_R'}{\sqrt{\pi}} + \frac{12\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'^3}{\sqrt{\pi}}\right)\\
&\qquad -\left(\frac{12\sqrt{2}\,p_R\sigma_R'^3 x_R'}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'^3}{\sqrt{\pi}} + \frac{32p_R^2\sigma_R'^4}{\pi} + \frac{24p_R^2\sigma_R'^2 x_R'^2}{\pi}\right)\\
&\qquad +\left(6\sigma_R'^2 + 6x_R^2 + \frac{12\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'}{\sqrt{\pi}}\right)x_R'^2\\
&\qquad +\left(6\sigma_R'^2 + 6x_R^2 + \frac{12\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{2\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'}{\sqrt{\pi}}\\
&\qquad +\left(6\sigma_R'^2 + 6x_R^2 + \frac{12\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{2p_R^2\sigma_R'^2}{\pi}\\
&\qquad -\left(3x_R'^4 + \frac{12\sqrt{2}\,p_R\sigma_R' x_R'^3}{\sqrt{\pi}} + \frac{36p_R^2\sigma_R'^2 x_R'^2}{\pi} + \frac{24\sqrt{2}\,p_R^3\sigma_R'^3 x_R'}{\pi\sqrt{\pi}} + \frac{12p_R^4\sigma_R'^4}{\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\left(3\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}+6\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}+x_{\mathrm{R}}'^{4}+\frac{16\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}\right)\\
&-\left(12\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}+4x_{\mathrm{R}}'^{4}+\frac{16\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}+\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}\right)\\
&-\left(\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathbf{R}}'}{\sqrt{\pi}}+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}+\frac{32p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi}+\frac{24p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}}{\pi}\right)\\
&+\left(6\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}+6x_{\mathrm{R}}^{4}+\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}\right)\\
&+\left(\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}+\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}^{3}}{\sqrt{\pi}}+\frac{48p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}}{\pi}\right)\\
&+\left(\frac{12p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi}+\frac{12p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}^{2}}{\pi}+\frac{24\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}^{3}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\pi\sqrt{\pi}}\right)\\
&-\left(3x_{\mathrm{R}}'^{4}+\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}+\frac{36p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}}{\pi}+\frac{24\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}^{3}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\pi\sqrt{\pi}}+\frac{12p_{\mathrm{R}}^{4}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi^{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\left(3\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}+6\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}+x_{\mathrm{R}}'^{4}+\frac{16\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}\right)\\
-&\left(12\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}+4x_{\mathrm{R}}'^{4}+\frac{16\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}+\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}\right)\\
-&\left(\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathbf{R}}'}{\sqrt{\pi}}+\frac{4\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}+\frac{32p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi}+\frac{24p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}}{\pi}\right)\\
+&\left(6\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}+6x_{\mathrm{R}}^{4}+\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}\right)\\
+&\left(\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}}+\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}^{3}}{\sqrt{\pi}}+\frac{48p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}}{\pi}\right)\\
+&\left(\frac{12p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi}+\frac{12p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}^{2}}{\pi}+\frac{24\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}^{3}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\pi\sqrt{\pi}}\right)\\
-&\left(3x_{\mathrm{R}}'^{4}+\frac{12\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}}+\frac{36p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}x_{\mathrm{R}}'^{2}}{\pi}+\frac{24\sqrt{2}p_{\mathrm{R}}^{3}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3}x_{\mathrm{R}}'}{\pi\sqrt{\pi}}+\frac{12p_{\mathrm{R}}^{4}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi^{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\sigma_{\mathrm{R}}'^{4} + \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi} - \frac{32 p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi} - \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{4}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi^{2}} \\
&+ \frac{16\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3} x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}} - \frac{16\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3} x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}} - \frac{12\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3} x_{\mathbf{R}}'}{\sqrt{\pi}} + \frac{12\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3} x_{\mathrm{R}}'}{\sqrt{\pi}} + \frac{24\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}^{3}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3} x_{\mathrm{R}}'}{\pi\sqrt{\pi}} - \frac{24\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}^{3}\sigma_{\mathrm{R}}'^{3} x_{\mathrm{R}}'}{\pi\sqrt{\pi}} \\
&+ 6\sigma_{\mathrm{R}}'^{2} x_{\mathrm{R}}'^{2} - 12\sigma_{\mathrm{R}}'^{2} x_{\mathrm{R}}'^{2} - \frac{24 p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2} x_{\mathrm{R}}'^{2}}{\pi} + 6\sigma_{\mathrm{R}}'^{2} x_{\mathrm{R}}'^{2} + \frac{48 p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2} x_{\mathrm{R}}'^{2}}{\pi} + \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2} x_{\mathrm{R}}^{2}}{\pi} - \frac{36 p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{2} x_{\mathrm{R}}'^{2}}{\pi} \\
&+ \frac{4\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}} - \frac{12\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}} - \frac{4\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}} + \frac{12\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}} + \frac{12\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}^{3}}{\sqrt{\pi}} - \frac{12\sqrt{2} p_{\mathrm{R}}\sigma_{\mathrm{R}}' x_{\mathrm{R}}'^{3}}{\sqrt{\pi}} \\
&+ x_{\mathrm{R}}'^{4} - 4x_{\mathrm{R}}'^{4} + 6x_{\mathrm{R}}^{4} - 3x_{\mathrm{R}}'^{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\sigma_{\mathrm{R}}'^{4} - \frac{20 p_{\mathrm{R}}^{2}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi} - \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{4}\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\pi^{2}} \\
&= \left(3 - \frac{20 p_{\mathrm{R}}^{2}}{\pi} - \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{4}}{\pi^{2}}\right)\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}
\end{aligned}
$$

かりに $x_{\mathrm{R}}' = 0$ , $\sigma_{\mathrm{R}}' = 0.5$ , $p_{\mathrm{R}} = -0.1$ とすると,

$$\left(3 - \frac{20 p_{\mathrm{R}}^{2}}{\pi} - \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{4}}{\pi^{2}}\right)\sigma_{\mathrm{R}}'^{4} = 0.183514$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000} - \overline{x}\right)^{4} f_{\mathrm{R}}\left(x = \frac{j}{1000}; x_{\mathrm{R}}' = 0, \sigma_{\mathrm{R}}' = 0.5, p_{\mathrm{R}} = -0.1\right) = 0.183514$$

かりに $x_{\mathrm{R}}' = 0.1$ , $\sigma_{\mathrm{R}}' = 0.5$ , $p_{\mathrm{R}} = -0.1$ とすると,

$$\left(3 - \frac{20 p_{\mathrm{R}}^{2}}{\pi} - \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{4}}{\pi^{2}}\right)\sigma_{\mathrm{R}}'^{4} = 0.183514$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000} - \overline{x}\right)^{4} f_{\mathrm{R}}\left(x = \frac{j}{1000}; x_{\mathrm{R}}' = 0.1, \sigma_{\mathrm{R}}' = 0.5, p_{\mathrm{R}} = -0.1\right) = 0.183514$$

かりに $x_{\mathrm{R}}' = 0.1$ , $\sigma_{\mathrm{R}}' = 0.25$ , $p_{\mathrm{R}} = -0.1$ とすると,

$$\left(3 - \frac{20 p_{\mathrm{R}}^{2}}{\pi} - \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{4}}{\pi^{2}}\right)\sigma_{\mathrm{R}}'^{4} = 0.0114696$$

$$\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000} - \overline{x}\right)^{4} f_{\mathrm{R}}\left(x = \frac{j}{1000}; x_{\mathrm{R}}' = 0.1, \sigma_{\mathrm{R}}' = 0.5, p_{\mathrm{R}} = -0.1\right) = 0.0114696$$

となる。OK！

したがって尖度 kurtosis は

$$\varepsilon_{\mathrm{R}} = \frac{\left(3 - \frac{20 p_{\mathrm{R}}^{2}}{\pi} - \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{4}}{\pi^{2}}\right)\sigma_{\mathrm{R}}'^{4}}{\left[\left(1 - \frac{2}{\pi} p_{\mathrm{R}}^{2}\right)\sigma_{\mathrm{R}}'^{2}\right]^{2}} - 3 = \frac{3 - \frac{20 p_{\mathrm{R}}^{2}}{\pi} - \frac{12 p_{\mathrm{R}}^{4}}{\pi^{2}}}{1 - \frac{4}{\pi} p_{\mathrm{R}}^{2} + \frac{4}{\pi^{2}} p_{\mathrm{R}}^{4}} - 3$$

$$=\frac{3-\frac{20p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}-\frac{12p_{\mathrm{R}}^4}{\pi^2}-3+\frac{12}{\pi}p_{\mathrm{R}}^2-\frac{12}{\pi^2}p_{\mathrm{R}}^4}{1-\frac{4}{\pi}p_{\mathrm{R}}^2+\frac{4}{\pi^2}p_{\mathrm{R}}^4}=\frac{-\frac{8p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}-\frac{24p_{\mathrm{R}}^4}{\pi^2}}{1-\frac{4}{\pi}p_{\mathrm{R}}^2+\frac{4}{\pi^2}p_{\mathrm{R}}^4}=-\frac{8p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\left(1+\frac{3p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)\left(1-\frac{2p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)^{-2}$$

となる。

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると,

$$-\frac{8p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\left(1+\frac{3p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)\left(1-\frac{2p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)^{-2}=-0.0260384$$

$$\frac{\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}-\bar{x}\right)^4 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)}{\left[\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}-\bar{x}\right)^2 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)\right]^2}-3=-0.0260384$$

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0.1$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると,

$$-\frac{8p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\left(1+\frac{3p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)\left(1-\frac{2p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)^{-2}=-0.0260384$$

$$\frac{\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}-\bar{x}\right)^4 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0.1,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)}{\left[\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}-\bar{x}\right)^2 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0.1,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)\right]^2}-3=-0.0260384$$

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0.1$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.25$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.1$ とすると,

$$-\frac{8p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\left(1+\frac{3p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)\left(1-\frac{2p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)^{-2}=-0.0260384$$

$$\frac{\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}-\bar{x}\right)^4 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0.1,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)}{\left[\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}-\bar{x}\right)^2 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0.1,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.1\right)\right]^2}-3=-0.0260384$$

かりに $x'_{\mathrm{R}}=0.1$ , $\sigma'_{\mathrm{R}}=0.25$ , $p_{\mathrm{R}}=-0.2$ とすると,

$$-\frac{8p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\left(1+\frac{3p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)\left(1-\frac{2p_{\mathrm{R}}^2}{\pi}\right)^{-2}=-0.11349$$

$$\frac{\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}-\bar{x}\right)^4 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0.1,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.2\right)}{\left[\sum_{j=-6000}^{6000}\left(\frac{j}{1000}-\bar{x}\right)^2 f_{\mathrm{R}}\left(x=\frac{j}{1000};x'_{\mathrm{R}}=0.1,\sigma'_{\mathrm{R}}=0.5,p_{\mathrm{R}}=-0.2\right)\right]^2}-3=-0.111349$$

となる。

OK！

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊
RIETVELD モデルを修正して強度値が負にならないようにする選択もありうる。そのためには

$$f_{\mathrm{R}}\left(x;x_{\mathrm{R}},b_{\mathrm{R}},p_{\mathrm{R}}\right)=N_{\mathrm{R}}\exp\left[-b_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2\right]\left\{\begin{array}{cc} 1-p_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2 & \left[x\le x_{\mathrm{R}}\right] \\ \max\left[0,1+p_{\mathrm{R}}\left(x-x_{\mathrm{R}}\right)^2\right] & \left[x_{\mathrm{R}}<x\right] \end{array}\right\}$$

ここで

$$\max\left[x,y\right]=\left\{\begin{array}{cc} y & \left[x<y\right] \\ x & \left[y\le x\right] \end{array}\right.$$

とすれば良い。このピーク形状モデルの低次キュムラントの形式を導くのは格段に難しいわけではないだろうが，あまり意味がないことには変わりないので，これ以上のことはしなくとも良かろうと思われる。