2011年12月13日(火)作成

キュムラント

任意の確率密度関数 probability density function $p(x)$ に対して，k 次のキュムラント cumulant κ_k が以下の式で定義されます。

$$\kappa_k \equiv \left[\frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \ln \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp(\theta x) \mathrm{d}\, x \right]_{\theta=0} \tag{1}$$

ここで,

$$P(\theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp(\theta x) \mathrm{d}\, x$$

とすれば,

$$P(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \mathrm{d}\, x = 1$$

となり,

$$\frac{\mathrm{d}^k P(\theta)}{\mathrm{d}\theta^k} = P^{(k)}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) \exp(\theta x) \mathrm{d}x$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^k P(\theta)}{\mathrm{d}\theta^k}\right]_{\theta=0} = P^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) \mathrm{d}x = \langle x^k \rangle$$

などの関係があります。ここで $\langle x \rangle$ は x の期待値 expectation value です。$\ln P(\theta)$ を θ で微分すれば,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \ln P(\theta) = \frac{P'(\theta)}{P(\theta)}$$

となりますから, 1 次キュムラント κ_1 は

$$\kappa_1 = \frac{P'(0)}{P(0)} = \langle x \rangle \tag{2}$$

となり，x の平均 average と同じです。

$\ln P(\theta)$ の二階微分は,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\ln P(\theta)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{P'(\theta)}{P(\theta)}\right]$$

$$=-\frac{\left[P'(\theta)\right]^2}{\left[P(\theta)\right]^2}+\frac{P''(\theta)}{P(\theta)}$$

となりますから，２次キュムラントκ_2 は

$$\kappa_2=\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\ln P(\theta)\right]_{\theta=0}=-\left[P'(0)\right]^2+P''(0)$$

$$=-\langle x\rangle^2+\langle x^2\rangle=\left\langle\left(x-\langle x\rangle\right)^2\right\rangle \tag{3}$$

となり，x の分散 variance あるいは二次中心積率 second central moment と同じです。同じように,

$$
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\theta^3}\ln P(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\ln P(\theta)\right]
$$

$$
= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{-\frac{\left[P'(\theta)\right]^2}{\left[P(\theta)\right]^2} + \frac{P''(\theta)}{P(\theta)}\right\}
$$

$$
= \frac{2\left[P'(\theta)\right]^3}{\left[P(\theta)\right]^3} - \frac{3P'(\theta)P''(\theta)}{\left[P(\theta)\right]^2} + \frac{P'''(\theta)}{P(\theta)}
$$

から，３次キュムラントは

$$
\kappa_3 = \left[\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\theta^3}\ln P(\theta)\right]_{\theta=0}
$$

$$
= 2\langle x\rangle^3 - 3\langle x\rangle\langle x^2\rangle + \langle x^3\rangle
$$

$$
= \left\langle \left(x - \langle x\rangle\right)^3 \right\rangle \tag{4}
$$

となり， x の三次中心積率 $\left\langle \left(x-\langle x\rangle\right)^3 \right\rangle$ と同じになります。ところが,

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\theta^4}\ln P(\theta)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\theta^4}\ln P(\theta)\right]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{\frac{2\left[P'(\theta)\right]^3}{\left[P(\theta)\right]^3}-\frac{3P'(\theta)P''(\theta)}{\left[P(\theta)\right]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{P'''(\theta)}{P(\theta)}\right\}$$

$$=-\frac{6\left[P'(\theta)\right]^4}{\left[P(\theta)\right]^4}+\frac{6\left[P'(\theta)\right]^2P''(\theta)}{\left[P(\theta)\right]^3}$$

$$+\frac{6\left[P'(\theta)\right]^2P''(\theta)}{\left[P(\theta)\right]^3}$$

$$-\frac{3\left\{\left[P''(\theta)\right]^2+P'(\theta)P'''(\theta)\right\}}{\left[P(\theta)\right]^2}$$

$$-\frac{P'(\theta)P'''(\theta)}{\left[P(\theta)\right]^2}+\frac{P^{(4)}(\theta)}{P(\theta)}$$

$$=-\frac{6\left[P'(\theta)\right]^4}{\left[P(\theta)\right]^4}+\frac{12\left[P'(\theta)\right]^2P''(\theta)}{\left[P(\theta)\right]^3}$$

$$-\frac{3\left[P''(\theta)\right]^2}{\left[P(\theta)\right]^2}-\frac{4P'(\theta)P'''(\theta)}{\left[P(\theta)\right]^2}+\frac{P^{(4)}(\theta)}{P(\theta)}$$

から，４次のキュムラントは

$$\kappa_4=\left[\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\theta^4}\ln P(\theta)\right]_{\theta=0}$$

$$=-6\langle x\rangle^4+12\langle x\rangle^2\langle x^2\rangle-3\langle x^2\rangle^2-4\langle x\rangle\langle x^3\rangle$$

$$+\left\langle x^4\right\rangle$$

$$=\left\langle\left(x-\langle x\rangle\right)^4\right\rangle-3\left\langle\left(x-\langle x\rangle\right)^2\right\rangle^2 \qquad (5)$$

となります。この値は，x の４次中心積率 $\left\langle\left(x-\langle x\rangle\right)^4\right\rangle$ とは異なる値であることに注意が必要でしょう。

名古屋工業大学
セラミックス基盤工学研究センター
井田 隆