2012年4月6日(金)

三囚人問題とベイズ推定

Three prisoners problem and Bayesian inference

名古屋工業大学 先進セラミックス研究センター

ICDD Regional Co-Chair of Eastern Pacific Rim

井田　隆

この問題は，1959 年に “Scientific American” で Martin Gardner が紹介したものとして知られています。数学的にはモンティ・ホール問題と似た問題です。「ベルトランの箱のパラドックス」という問題が参考にされたとも考えられています。

死刑を宣告された３人の囚人が別々の牢屋に入れられていました。そのうちの一人がランダムに選ばれて，恩赦を受けることになりました。看守は誰が恩赦になるか知っていますが，教えることは禁じられています。囚人 A が看守に，他の２人のうち死刑になるのがどちらかを訊ねました：「もし B が恩赦になるなら，C の名前を教えてください。もし C が恩赦になるなら B の名前を教えてください。そしてもし私が恩赦になるなら，コイン投げをして B か C の名前のどちらを教えるか決めてください」

看守は囚人 A に，囚人 B が死刑になると伝えました。囚人 A は，恩赦になるのが自分か囚人 C のどちらかなので，助かる確率が 1/3 から 1/2 になったと喜びました。囚人 A は囚人 C にこっそりこのことを伝えました。囚人 C は，囚人 A が恩赦になる確率は 1/3 のままだけど，自分が恩赦になる確率は 2/3 になったと喜びました。正解は？

正解は，「囚人 A が恩赦になる確率は 1/3 のままだが，囚人 C が恩赦になる確率は 2/3 になった」です。

看守の答えは必ず B か C かのどちらかであり，どちらの答えになるかは囚人 A が恩赦になるかどうかと関係ありません。したがって，囚人 A が恩赦になる確率には変わりありません。一方で，看守が B と答えるか C と答えるかは，囚人 C が恩赦になるかどうかの影響を受けるので，看守の答えによって囚人 C の恩赦になる確率は変わります。囚人 A が恩赦になる確率は 1/3 のままであり，囚人 B が恩赦になる確率が 0 なのですから，囚人 C の恩赦になる確率は 2/3 になります。

ただし，これは看守に「答えない」という選択のないことが前提となっています。

＊＊＊＊　ベイズ推定による解法　＊＊＊＊

囚人 A, B, C のそれぞれが恩赦になる事象を A, B, C とし，その実現する確率を $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ とする。また，「囚人 B は死刑になると看守が述べる」事象を b として，そ

の確率を $P(b)$ とする。さらに「囚人A, B, Cが恩赦されるそれぞれの場合に，看守が囚人Bの名前をあげる確率」を $P(b|A)$, $P(b|B)$, $P(b|C)$ とする。

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/3,$$

$$P(b|A)=1/2,\ P(b|B)=0,\ P(b|C)=1$$

から，ベイズの定理によれば，囚人Aが恩赦を受ける確率は

$$P(A|b)=\frac{P(b|A)P(A)}{P(b)}=\frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A)+P(b|B)P(B)+P(b|C)P(C)}$$

$$=\frac{1/2\times1/3}{1/2\times1/3+0\times1/3+1\times1/3}=\frac{1}{3}$$

であり，囚人Cが恩赦を受ける確率は

$$P(C|b)=\frac{P(b|C)P(C)}{P(b)}=\frac{P(b|C)P(C)}{P(b|A)P(A)+P(b|B)P(B)+P(b|C)P(C)}$$

$$=\frac{1\times1/3}{1/2\times1/3+0\times1/3+1\times1/3}=\frac{2}{3}$$

である。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

囚人Aと囚人Cの違いは，$P(b|A)=1/2$ と $P(b|C)=1$ との違いにあります。

囚人Aと囚人Cが恩赦をうけるかについて，$P(A)$，$P(C)$ が事前確率あるいは先験確率 prior probability と呼ばれるもので，$P(A|b)$，$P(C|b)$ が 事後確率 posterior probability と呼ばれるものです。