

## 三囚人問題とベイズ推定

### Three prisoners problem and Bayesian inference

名古屋工業大学 先進セラミックス研究センター

ICDD Regional Co-Chair of Eastern Pacific Rim

井田 隆

この問題は、1959年に“Scientific American”でMartin Gardnerが紹介したものとして知られています。数学的には[モンティ・ホール問題](#)と似た問題です。「[ベルトランの箱のパラドックス](#)」という問題が参考にされたとも考えられています。

死刑を宣告された3人の囚人が別々の牢屋に入れられていました。そのうちの一人がランダムに選ばれて、恩赦を受けることになりました。看守は誰が恩赦になるか知っていますが、教えることは禁じられています。囚人Aが看守に、他の2人のうち死刑になるのがどちらかを訊ねました：「もしBが恩赦になるなら、Cの名前を教えてください。もしCが恩赦になるならBの名前を教えてください。そしてもし私が恩赦になるなら、コイン投げをしてBかCの名前のどちらを教えるか決めてください」

看守は囚人Aに、囚人Bが死刑になると伝えました。囚人Aは、恩赦になるのが自分か囚人Cのどちらかなので、助かる確率が $1/3$ から $1/2$ になったと喜びました。囚人Aは囚人Cにこっそりこのことを伝えました。囚人Cは、囚人Aが恩赦になる確率は $1/3$ のままだけど、自分が恩赦になる確率は $2/3$ になったと喜びました。正解は？

正解は、「囚人Aが恩赦になる確率は $1/3$ のままだが、囚人Cが恩赦になる確率は $2/3$ になった」です。

看守の答えは必ずBかCかのどちらかであり、どちらの答えになるかは囚人Aが恩赦になるかどうかと関係ありません。したがって、囚人Aが恩赦になる確率には変わりありません。一方で、看守がBと答えるかCと答えるかは、囚人Cが恩赦になるかどうかの影響を受けるので、看守の答えによって囚人Cの恩赦になる確率は変わります。囚人Aが恩赦になる確率は $1/3$ のままであり、囚人Bが恩赦になる確率が0なので、囚人Cの恩赦になる確率は $2/3$ になります。

ただし、これは看守に「答えない」という選択のないことが前提となっています。

\*\*\*\* ベイズ推定による解法 \*\*\*\*

囚人A, B, Cのそれぞれが恩赦になる事象を $A, B, C$ とし、その実現する確率を $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$ とする。また、「囚人Bは死刑になると看守が述べる」事象を $b$ として、そ

の確率を  $P(b)$  とする。さらに「囚人 A, B, C が恩赦されるそれぞれの場合に、看守が囚人 B の名前をあげる確率」を  $P(b|A)$ ,  $P(b|B)$ ,  $P(b|C)$  とする。

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3,$$

$$P(b|A) = 1/2, \quad P(b|B) = 0, \quad P(b|C) = 1$$

から、ベイズの定理によれば、囚人 A が恩赦を受ける確率は

$$\begin{aligned} P(A|b) &= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b)} = \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\ &= \frac{1/2 \times 1/3}{1/2 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1 \times 1/3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であり、囚人 C が恩赦を受ける確率は

$$\begin{aligned} P(C|b) &= \frac{P(b|C)P(C)}{P(b)} = \frac{P(b|C)P(C)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\ &= \frac{1 \times 1/3}{1/2 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1 \times 1/3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

\*\*\*\*\*

囚人 A と囚人 C の違いは、 $P(b|A) = 1/2$  と  $P(b|C) = 1$  との違いにあります。

囚人 A が恩赦をうけるかについて、 $P(A)$ ,  $P(C)$  が事前確率あるいは先験確率 prior probability と呼ばれるもので、 $P(A|b)$ ,  $P(C|b)$  が事後確率 posterior probability と呼ばれるものです。