2012年4月9日(月)

モンティ・ホール問題とベイズ推定

Monty Hall problem and Bayesian inference

名古屋工業大学 先進セラミックス研究センター
ICDD Regional Co-Chair of Eastern Pacific Rim
井田　隆

この問題は，米国の Monty Hall が司会を務めるゲームショー番組「Lets' make a deal」の中で行われたゲームに関する論争に由来します。

回答者の前に３つの扉がある。１つの扉の後ろには新車（当たり）が置かれており，他の扉の後ろにはヤギ（はずれ）がいる。回答者は３つの扉からどれか一つを選ぶ。モンティ（司会者）は回答者が選ばなかった扉のうち，ヤギがいる扉を開けてみせる。司会者は回答者に，残った１つの閉じた扉を選び直しても良いと言う。

回答者が選ぶ扉を変える (switch) と当たりの確率が 2/3 になるのに対して，変えなければ (stay) 当たりの確率は 1/3 であることを，米国のコラムニスト Marilyn von Savant が正しく指摘したのですが，「回答者が選ぶ扉を変えても変えなくても，当たりの確率は 1/2 である」と思い込む人が多く，モンティ・ホール問題と呼ばれるようになりました。

＊＊＊＊　正しい説明　はじめ　＊＊＊＊
はじめに回答者が選んだ扉を A とする。司会者が開けた扉を B として，もう一つの扉を C とする。扉 A が当たりの確率は 1/3 である。司会者が扉 B を開けたのだから，扉 B が当たりである確率は 0 である。扉 A, B, C のどれかが当たりなのだから，扉 C が当たりである確率は，1 – 1/3 – 0 = 2/3 である。
＊＊＊＊　正しい説明　おわり　＊＊＊＊

この問題は，ベイズ推定の例題として引き合いに出されることもあるようです。例えば以下のような説明のしかたがあります。

＊＊＊＊　ベイズ推定を使う説明　はじめ　＊＊＊＊
初めに回答者の選んだ扉 A が当たりの確率を $P(A)$，司会者が扉 B を開ける確率を $P(B)$，扉 C が当たりの確率を $P(C)$ とする。扉 A が当たりの場合に司会者が扉 B を開ける確率を $P(B|A)$ として，完全にランダムに扉を選択するとすれば，$P(B|A)=1/2$ である。 扉 C が当たりの場合に司会者が扉 B を開ける確率を $P(B|C)$ とすれば $P(B|C)=1$ である。司会者が扉 B を開けたときに扉 C が当たりである確率を $P(C|B)$ とする。ベイズの定理から

$$P(C|B)=\frac{P(B|C)P(C)}{P(B)}=\frac{P(B|C)P(C)}{P(B|A)P(A)+P(B|C)P(C)}=\frac{1\times1/3}{1/2\times1/3+1\times1/3}=\frac{2}{3}$$

である。しかし扉 A が当たりの場合に扉 B を開ける確率が $P(B|A)=1/2$ でない場合，つまり司会者に癖があり，$P(B|A)=x$ と表される場合，

$$P(C|B)=\frac{P(B|C)P(C)}{P(B)}=\frac{P(B|C)P(C)}{P(B|A)P(A)+P(B|C)P(C)}=\frac{1\times1/3}{x\times1/3+1\times1/3}=\frac{1}{1+x}$$

となる。

＊＊＊＊　ベイズ推定を使う説明　おわり　＊＊＊＊

上の説明では，記号の使い方が統一されていないことと，扉 B と扉 C の定義があいまいなので，混乱しやすそうです。「回答者が初めに選んだ扉を A とする」のはそのままで構いませんが，混乱を避けるために，「扉 A が当たり」という事象を A，「扉 B が当たり」という事象を B，「扉 C が当たり」という事象を C と表し，「司会者が扉 B を開ける」事象を b，「司会者が扉 C を開ける」事象を c と表すのが良いでしょう。かりに司会者に癖があって，「扉 A が当たりのとき，残った二つの扉のうち『x の確率で開ける扉』を B と定義する」なら，$P(b|A)=x$ と書けます（←不自然な定義かもしれませんが，これなら間違っていることにはなりません）。この場合，「扉 A が当たりのとき，$1-x$ の確率で扉 C が開けられる」ことになるので，$P(c|A)=1-x$ と書けます。以下の関係が成り立ちます。

当たりの扉	扉 B が開く確率	扉 C が開く確率
A	$x/3$	$(1-x)/3$
B	0	$1/3$
C	$1/3$	0

これらの関係は，$P(A)=P(B)=P(C)=1/3$，$P(b|A)=x$，$P(c|A)=1-x$，$P(b|B)=0$，$P(c|B)=1$，$P(b|C)=1$，$P(c|C)=0$ から，

$$P(b|A)P(A)=x\times1/3=x/3,\qquad P(c|A)P(A)=(1-x)\times1/3=(1-x)/3,$$

$$P(b|B)P(B)=0\times1/3=0,\qquad P(c|B)P(B)=1\times1/3=1/3,$$

$$P(b|C)P(C)=1\times1/3=1/3,\qquad P(c|C)P(C)=0\times1/3=0$$

という関係が導かれることによります。また，

$$P(b)=P(b|A)P(A)+P(b|B)P(B)+P(b|C)P(C)=(1+x)/3,$$

$$P(c)=P(c|A)P(A)+P(c|B)P(B)+P(c|C)P(C)=(2-x)/3$$

という関係も成立します。ベイズの定理から，「『開けられた扉が B』（事象 b）のときに『扉 C が当たり』（事象 C）の確率」は

$$P(C|b)=\frac{P(b|C)P(C)}{P(b)}=\frac{1\times 1/3}{(1+x)/3}=\frac{1}{1+x}$$

であり，「『開けられた扉が C』（事象 c）のときに『扉 B が当たり』（事象 B）の確率」は，

$$P(B|c)=\frac{P(c|B)P(B)}{P(c)}=\frac{1\times 1/3}{(2-x)/3}=\frac{1}{2-x}$$

となるのですが，回答者は「開けられた扉と異なる扉を選ぶ」ことしかできないので，$P(C|b)$ と $P(B|c)$ の区別は意味を持ちません。「『初めに選んだ扉とも司会者が開けた扉とも異なる扉』が当たりになる確率」は，

$$P(C|b)P(b)+P(B|c)P(c)=\frac{1}{1+x}\times\frac{1+x}{3}+\frac{1}{2-x}\times\frac{2-x}{3}=\frac{2}{3}$$

であり，やはり 2/3 になります。

しかし，たとえば，「扉 A が当たりのとき，司会者は必ず扉 B を開ける」（$P(b|A)=1$，$P(c|A)=0$）という癖があって，回答者がそのことを知っていれば，司会者が扉 B を開けたときに扉 C が当たりの確率は $P(C|b)=1/2$，扉 A が当たりの確率は $P(A|b)=1/2$ となります。一方，この条件で司会者が扉 C を開けたときには，扉 B が当たりの確率は $P(B|c)=1$，扉 A が当たりの確率は $P(A|c)=0$ となります。

このように，正しくベイズ推定を行えば，正解を導けるのですが，ベルトランの箱のパラドックスや三囚人問題より少し複雑になっていて，必ずしも等価な問題ではないかもしれません。

なお，モンテカルロ・シミュレーションで，司会者がランダムに選択することを前提として，回答者が常に一回目と二回目の選択を変更した場合に賞品が得られる累積の回数を計算した結果は以下のようになりました。

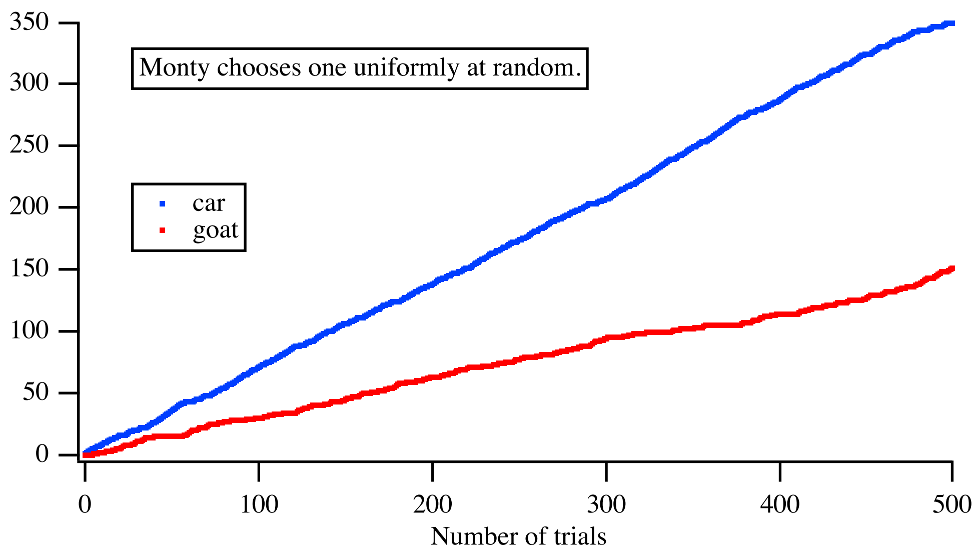

Fig. 1　司会者が確率 1/2 で扉を選択する場合の当たり (car) とはずれ (goat) の累積数

回答者が常に一回目と二回目の選択を変更した場合に，賞品が得られる確率は，賞品が得られない確率のおよそ２倍になっています。

司会者が，「可能なら常に若い番号の扉を開く癖」があったとした場合のシミュレーションの結果は以下のようになりました。

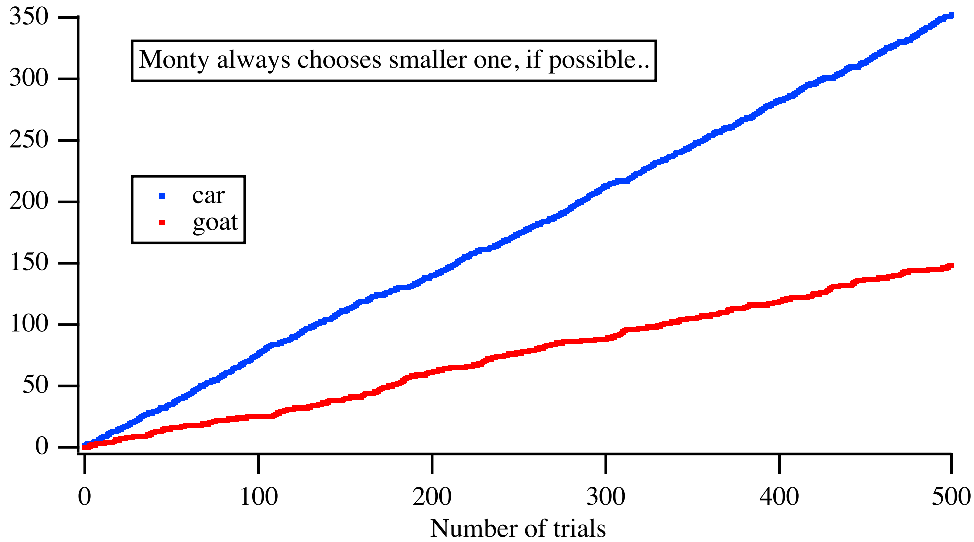

Fig. 2　司会者が可能なら常に若い番号の扉を開く場合の当たり (car) とはずれ (goat) の累積数

回答者にとっては，司会者の扉の選び方に癖があってもなくても結果は同じです。