

ベルトランの箱のパラドックスとベイズ推定

Bertrand's box paradox and Bayesian inference

名古屋工業大学 先進セラミックス研究センター
ICDD Regional Co-Chair of Eastern Pacific Rim

井田 隆

このパラドックスは、1889年に Joseph Bertrand が“Calcul des Probabilités”で紹介したものと
して知られています。[三囚人問題](#)の元になっていると言われています。

3つの箱があります。

1. 2枚の金貨が入っている箱 (GG)
2. 2枚の銀貨が入っている箱 (SS)
3. 1枚の金貨と1枚の銀貨が入っている箱 (GS)

一つの箱をランダムに選んで、さらにその箱の中から一枚のコインをランダムに取り出したときに、それが金貨だったとします。この時点で、選んだ箱が SS である可能性は除外されたので、選んだ箱は GG か GS かのどちらかであることがわかります。そこで、箱に残ったもう一枚のコインが金貨である確率は $1/2$ のように思えるかもしれませんが、実はその確率は $2/3$ です。

この答えは、以下のように導くことができます。

初めに箱を選択したときに、GG, SS, GS のどれを選ぶかはそれぞれ $1/3$ の確率である。一枚目のコインが金貨である場合に、二枚目のコインが銀貨であるのは GS を選んだ場合だけであり、その確率は $1/3$ である。従って、二枚目のコインが金貨である (GG を選んだ) 確率は $1 - 1/3 = 2/3$ となる。

**** ベイズ推定による解法 ****

GG, SS, GS の箱を選ぶ確率をそれぞれ $P(GG)$, $P(SS)$, $P(GS)$ とすると、 $P(GG) = P(SS) = P(GS) = 1/3$ である。GG, SS, GS の箱を選んだ場合のそれぞれについて、一枚目に金貨が出る確率は $P(g|GG) = 1$, $P(g|SS) = 0$, $P(g|GS) = 1/2$ である。一枚目に金貨が出た場合に、選んだ箱が GG である確率 $P(GG|g)$ は、ベイズの定理から

$$\begin{aligned}
 P(GG|g) &= \frac{P(g|GG)P(GG)}{P(g)} = \frac{P(g|GG)P(GG)}{P(g|GG)P(GG) + P(g|SS)P(SS) + P(g|GS)P(GS)} \\
 &= \frac{1 \times 1/3}{1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1/2 \times 1/3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

である。ただし、ここで $P(g)$ は一枚目に金貨が出る確率を意味する。

選んだ箱が GG と GS のどちらであるかの確率は等しく見えるかもしれませんが、「選んだ箱が GS の場合」に比べて「選んだ箱が GG の場合」の方が「一枚目のコインが金貨になる」確率が高いので、逆に「一枚目のコインが金貨であった」とすると、箱が GS である確率よりも GG である確率が高くなります。

$P(GG)$ は事前確率あるいは先験確率 prior probability と呼ばれ、 $P(GG|g)$ は事後確率 posterior probability と呼ばれます。