2011年12月13日(火) 作成
2012年1月4日(水) 修正

畳み込みの例：複数のサイコロの目の和

「畳み込み」とは「複数のサイコロを振って出た目を足し合わせた数がどのような統計分布を持つか」という問題だと思えば理解しやすいでしょう。
　概念としては何も難しいところはありませんが，サイコロの数が多い場合に普通の方法では実際に計算することが困難です。

一つのサイコロを振ったとき，1 から 6 の目が出る確率はいずれも 1/6 です。出る目の値

を S_1 として，確率分布をグラフに描くと Fig. 1 のようになります。

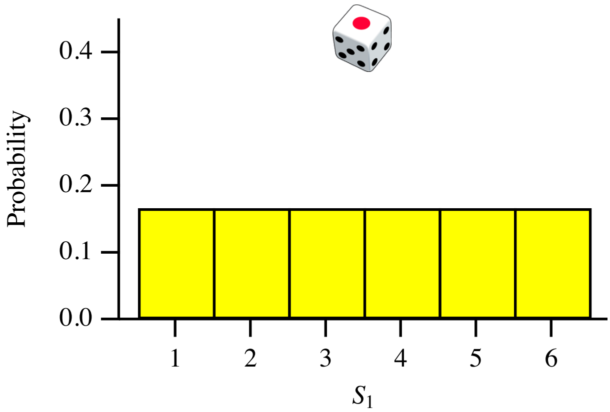

Fig. 1　一つのサイコロを振ったときに出る目の値 S_1 の確率分布

二つのサイコロを振って出る目の和 S_2 は，2 から12までの値をとりますが，7 という値を

とる確率が最大になり，確率分布は Fig. 2 のようになります。

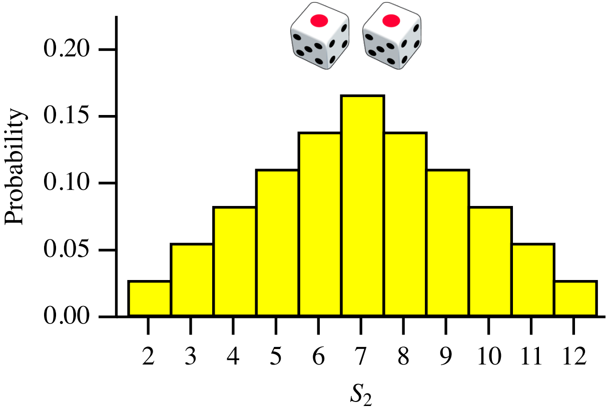

Fig. 2　二つのサイコロを振ったときに出る目の和 S_2 の確率分布

三つのサイコロを振って出る目の和 S_3 は，3 から 18 までの値をとり，確率分布は Fig. 3 のようになります。

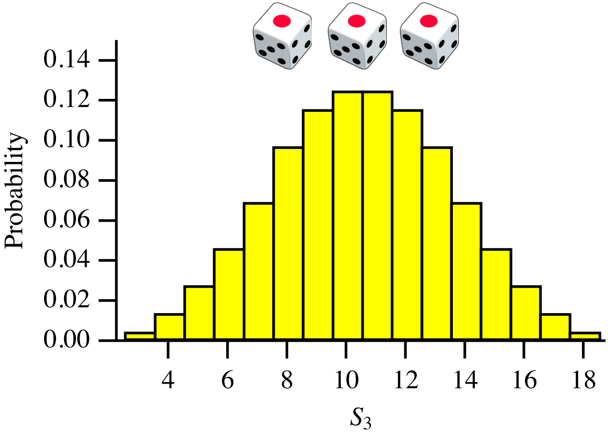

Fig. 3　三つのサイコロを振ったときに出る目の和 S_3 の確率分布

第 j 番目のサイコロの目が X_j という値をとる確率を $p_j(X_j)$ とすれば,

$$p_j\left(X_j\right)=\begin{cases} 1/6 & \left[X_j=1,\cdots,6\right] \\ 0 & \left[\text{otherwise}\right] \end{cases} \tag{1}$$

と書けます。

N 個のサイコロを振ったときに，出る目の和が S となる確率は，

$$P(S)=\sum_{X_1} p_1\left(X_1\right)\cdots\sum_{X_N} p_N\left(X_N\right)$$

$$\times\left\{\begin{array}{ll} 1 & \left[S-\sum_j X_j=0\right] \\ 0 & \left[S-\sum_j X_j\neq 0\right] \end{array}\right\} \tag{2}$$

と表されます。また，

$$P(S)=\sum_{X_2}\cdots\sum_{X_N} p_1(S-X_2-\cdots-X_N)$$

$$\times\ p_2(X_2)\cdots p_N(X_N) \tag{3}$$

と書くこともできます。さらにサイコロの例に限れば,

$$P(S)=\frac{1}{6^N}\sum_{X_2=1}^{6}\cdots\sum_{X_N=1}^{6}\left\{\begin{array}{ll} 1 & \left[S=\sum_{j=2}^{N}X_j\right] \\ 0 & \left[S\neq\sum_{j=2}^{N}X_j\right] \end{array}\right\} \tag{4}$$

と表す事もできます。

ところが，例えば $N=10{,}000{,}000$ のときに，$P(S)$ を求めるためには，$6^{9,999,999}$ 項の和

を計算する必要があります。1 秒間に 10^{16} 回の計算ができるスーパーコンピュータを使っても,

$$\frac{6^{9,999,999}}{10^{16}\left[\mathrm{s}^{-1}\right]}\times\frac{1[\mathrm{h}]}{3,600[\mathrm{s}]}\times\frac{1[\mathrm{day}]}{24[\mathrm{h}]}\times\frac{1[\mathrm{year}]}{365[\mathrm{day}]}$$

$$\approx \exp\left(10^{7}\ln 6\ -16\ln 10-\ln 3600-\ln 24\right.$$

$$\left.-\ln 365\right)\ [\mathrm{year}]$$

$$\approx \exp\left(1.79\times 10^{7}\right)\ [\mathrm{year}]$$

$$\approx 10^{7.8\times 10^{6}}\ \ [\mathrm{year}]$$

つまり,「10 の 700万乗」年間以上の計算時間がかかることになり,事実上不可能な計算となります。

一方で，統計分布の特徴は，キュムラントという概念を使えば容易に計算する事ができます。一つのサイコロの目の期待値（平均）は

$$\kappa_1 = \sum_{X_1=1}^{6} X_1 p_1\left(X_1\right) = \sum_{X_1=1}^{6} \frac{X_1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

であり，分散は

$$\kappa_2 = \sum_{X_1=1}^{6} \left(X_1 - \kappa_1\right)^2 p_1\left(X_1\right) = \frac{1}{6}\sum_{X_1=1}^{6}\left(X_1 - \frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{j_1=1}^{3}\left(j - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+9+25}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.91667$$

という値をとります。３次キュムラントは

$$\kappa_3 = \sum_{X_1=1}^{6} \left(X_1 - \kappa_1\right)^3 p_1\left(X_1\right) = \frac{1}{6}\sum_{X_1=1}^{6}\left(X_1 - \frac{7}{2}\right)^3$$

$$= 0$$

となり，これと同様に３次以上の奇数次数キュムラントの値はすべてゼロになります。
４次キュムラントは

$$\kappa_4 = \sum_{X_1=1}^{6} \left(X_1 - \kappa_1\right)^4 p_1\left(X_1\right) - 3\kappa_2^2$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{X_1=1}^{6}\left(X_1 - \frac{7}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{35}{12}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}\left(j - \frac{1}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{35}{12}\right)^2$$

$$= \frac{1+81+625}{48} - \frac{1225}{48} = -\frac{518}{48} \approx -10.7917$$

です。

「N個のサイコロを振って出る目の和」の平均は，「一つのサイコロを振って出る目」の平均のN倍になります。つまり

$$N\kappa_1 = \frac{7}{2}N = 3.5N\,,$$

となります。同じように，N個のサイコロを振って出る目の和の分散は

$$N\kappa_2 = \frac{35}{12}N \approx 2.91667N\,,$$

３次以上の奇数次キュムラントは

$$N\kappa_3 = N\kappa_5 = \cdots = 0$$

４次キュムラントは

$$\kappa_4 = -\frac{518}{48}N \approx -10.7917N$$

となることは容易に導かれます。

分布関数の形状は尖度（せんど）
kurtosis：

$$\frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} = -\frac{518N/48}{(35N/12)^2} = -\frac{222}{175N}$$

で特徴づけられ，サイコロの数 N の値が大きくなると 0 に近づきます。このことは N の値が大きくなると分布の形状が正規分布関数に近づいていくことを意味しています。このことを中心極限定理 central limit theorem と言います。

４個，５個のサイコロを振って出る目の和 S_4 と S_5 の確率分布は Figs 4, Fig. 5 のようになります。またこれらの図には，平均値 $m = 7N/2$ と分散の値 $\sigma^2 = 35N/12$ に対して

$$p_{\mathrm{Gauss}}(x;m;\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

で計算される正規分布型（Gauss 型）関数も描いてあります。

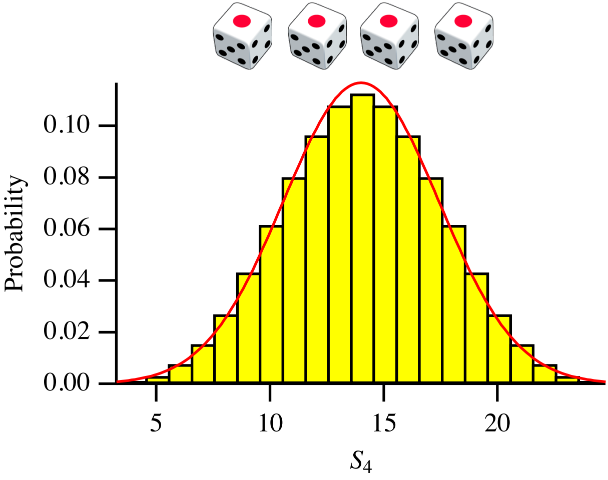

Fig. 4　4 つのサイコロを振ったときに出る目の和 S_4 の確率分布。赤い曲線は対応する平均と分散の値を持つ正規分布関数を表す。

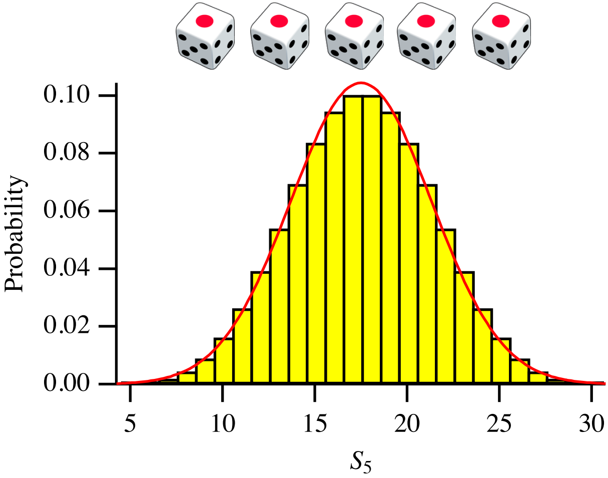

Fig. 5　5つのサイコロを振ったときに出る目の和 S_5 の確率分布。赤い曲線は対応する平均と分散を持つ正規分布関数を表す。

Fig. 1 ~ Fig. 5 から，サイコロの数が多くなればなるほど，目の和の統計分布が正規分布に近くなることがわかるでしょう。

名古屋工業大学
セラミックス基盤工学研究センター
井田 隆