2011年12月13日(火) 作成

畳み込みに関する キュムラントの加性性

「畳込みのキュムラント」は「『成分関数のキュムラント』の和」に等しいという関係があります。このことを加成性 additivity と呼びます。

確率密度関数 $p(x)$ に対するキュムラント $\kappa_k\left[p(x)\right]$ を以下の式で定義します。

$$\kappa_k\left[p(x)\right] \equiv \lim_{\theta\to 0}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\ln\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\exp(\theta x)\,\mathrm{d}\,x \qquad (1)$$

また，二つの関数 $p_1(x), p_2(x)$ の畳み込みを，

$$p_1(x) * p_2(x)$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1)\,p_2(x_2)\,\delta(x - x_1 - x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \quad (2)$$

で定義します。このとき，

$$\kappa_k\left[p_1(x) * p_2(x)\right] = \kappa_k\left[p_1(x)\right] + \kappa_k\left[p_2(x)\right] \quad (3)$$

という関係が常に成立します。このことは以下のように導く事ができます。

畳み込みのキュムラントは

$$\kappa_k\left[p_1(x) * p_2(x)\right]$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\ln\int_{-\infty}^{\infty}\left[p_1(x)*p_2(x)\right]\exp(\theta x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\ln\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_1(x_1)\,p_2(x_2)$$

$$\times\ \delta(x-x_1-x_2)\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2\exp(\theta x)\,\mathrm{d}\,x$$

と書けますが，積分の順序を入れ替えて

$$\kappa_k\left[p_1(x)*p_2(x)\right]$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\ln\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_1(x_1)\,p_2(x_2)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\ \delta(x-x_1-x_2)\exp(\theta x)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2$$

として，変数変換 $x-x_1-x_2\equiv y$ を適用すれば，

$$\kappa_k\left[p_1(x)*p_2(x)\right]$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\ln\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_1(x_1)\,p_2(x_2)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\exp\left[\theta(y+x_1+x_2)\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{4}$$

となります。ここで，ディラックのデルタ関数 $\delta(y)$ と任意の関数 $f(y)$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,\delta(y)\,\mathrm{d}y=f(0) \tag{5}$$

という関係が成立することから，式 (4) の中の y についての積分は解けて，

$$\kappa_k\left[p_1(x)*p_2(x)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \ln \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) p_2(x_2) \\
&\quad \times \exp\left[\theta(x_1 + x_2)\right] \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \ln \left[\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) \exp(\theta x_1) \mathrm{d}x_1 \right. \\
&\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_2) \exp(\theta x_2) \mathrm{d}x_2 \right] \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \ln \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) \exp(\theta x_1) \mathrm{d}x_1 \\
&\quad + \lim_{\theta \to 0} \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \ln \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_2) \exp(\theta x_2) \mathrm{d}x_2 \\
&= \kappa_k\left[p_1(x)\right] + \kappa_k\left[p_2(x)\right]
\end{aligned}
$$

となります。つまり，

$$\kappa_k\left[p_1(x)*p_2(x)\right]=\kappa_k\left[p_1(x)\right]+\kappa_k\left[p_2(x)\right]$$

という関係が成立します。

名古屋工業大学
セラミックス基盤工学研究センター
井田 隆