平成 17 年 6 月 8 日

軸発散収差関数の求め方

井田　隆

0.1　はじめに

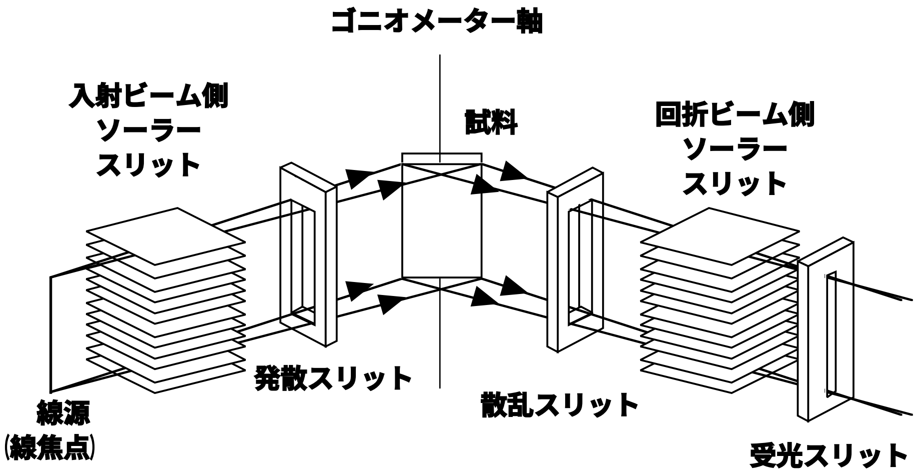

図 1: Bragg-Brentano 型粉末回折計

実験室でもっともふつうに使用される粉末 x 線回折計は模式的に図 1 のようなものです。このタイプの回折計を Bragg-Brentano 型とか集中ジオメトリ (focal geometry) の回折計とも呼びます。なお，図 1 の配置は「横形」と呼ばれ，実際にはゴニオメータ軸を水平にした「縦形」の配置も良く使われます。

さて，Bragg-Brentano 型粉末回折計において，入射ビームと回折ビームの水平方向への発散は発散スリットと散乱スリットにより制限され，垂直方向への発散は一対のソーラースリットによって制限されています。ソーラースリットは金属箔を平行に並べたもので，箔の長さと間隔により決まる角度（開き角）に発散が制限されます。図 2 に示すように開き角を Φ と定義すると，水平方向から角度 α ずれたビームの強度が α に依存してどのように変化するかは

$$f_{\mathrm{B}}(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Phi}\left(1 - \dfrac{|\alpha|}{\Phi}\right) & (-\Phi < \alpha < \Phi \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{1}$$

という式で表され，これを図示すれば図 3 のようになります。ビームが水平（$\alpha = 0$）のとき最大の強度であり，$|\alpha|$ を増やすと Φ に到るまで直線的に強度が減少します。この二等辺三角形の形をした関数は時系列分析の分野では Bartlett 関数と呼ばれます。

0.2　垂直発散と回折角との関係

図 4 のように入射ビームが水平面から角度 α ずれていて，回折ビームが水平面から角度 β ずれているときの，回折角を 2θ とします。現実には回折角として記録されるのはゴニオメーターの回

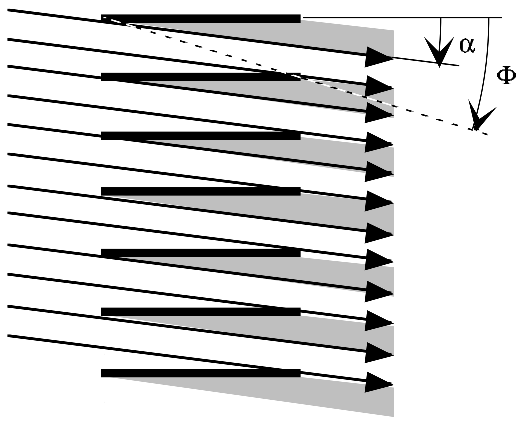

図 2: ソーラースリットによる垂直発散の制限。$\alpha = 0$ のときに最大の強度で，α を増すと影になる部分が増えて，$\alpha = \Phi$ に至るまで直線的に強度が減少するはずである。

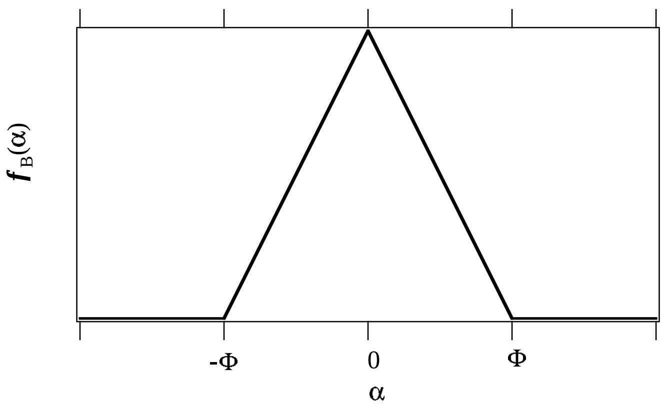

図 3: ソーラースリットにより制限されたビーム強度の角度依存性。Bartlett 窓と呼ばれる。

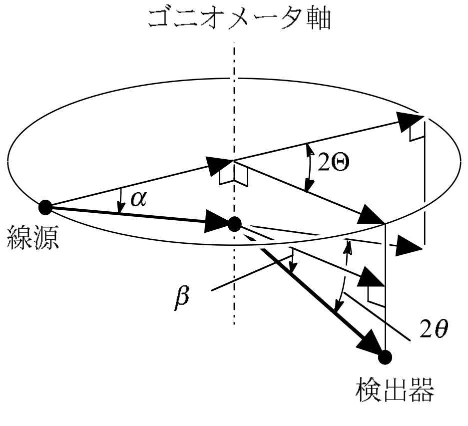

図 4: 角度 α, β, 2Θ, 2θ の関係。入射ビームが水平面から角度 α ずれていて，回折ビームが水平面から角度 β ずれているときの，回折角を 2θ とする。2Θ は見かけの回折角である。

転角であり，これを 2Θ とすると，真の回折角 2θ からわずかにずれます。2θ と 2Θ とを小文字と大文字で区別していることに注意してください。以下では，垂直方向のずれの角度 α, β と，真の回折角 2θ，見かけの回折角 2Θ との関係を求めます。

図 5 のようにベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{\Delta a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{\Delta b}$ を定義します。

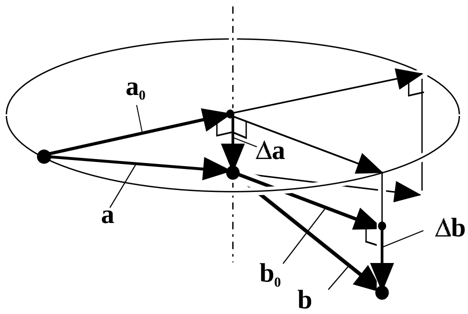

図 5: ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{\Delta a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{\Delta b}$ の定義

ゴニオメータ半径を R とすれば，

$$|\mathbf{a_0}| = |\mathbf{b_0}| = R \tag{2}$$

なので，

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| &= R/\cos\alpha &(3)\\ |\mathbf{b}| &= R/\cos\beta &(4)\\ |\mathbf{\Delta a}| &= R\tan\alpha &(5)\\ |\mathbf{\Delta b}| &= R\tan\beta &(6)\end{aligned}$$

となります。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角が 2θ なのですから，

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos 2\theta \\ &= \frac{R^2\cos 2\theta}{\cos\alpha\cos\beta} \end{aligned} \tag{7}$$

となりますが，一方で

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (\mathbf{a_0}+\mathbf{\Delta a})\cdot(\mathbf{b_0}+\mathbf{\Delta b}) \\ &= \mathbf{a_0}\cdot\mathbf{b_0}+\mathbf{\Delta a}\cdot\mathbf{\Delta b} \\ &= |\mathbf{a_0}|\,|\mathbf{b_0}|\cos 2\Theta + |\mathbf{\Delta a}|\,|\mathbf{\Delta b}| \\ &= R^2(\cos 2\Theta + \tan\alpha\tan\beta) \end{aligned} \tag{8}$$

となります。ただし，ここでは $\mathbf{a_0}\perp\mathbf{\Delta b}$, $\mathbf{b_0}\perp\mathbf{\Delta a}$, $\mathbf{\Delta a}\parallel\mathbf{\Delta b}$ の関係を用いています。$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ についての 2 つの式を比較して

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos\alpha\cos\beta} = \cos 2\Theta + \tan\alpha\tan\beta \tag{9}$$

書き直せば

$$\cos 2\theta = \cos 2\Theta\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{10}$$

という式が得られます。これで「真の回折角 2θ」と「見かけの回折角 2Θ」,「入射ビームのずれ α」,「反射ビームのずれ β」の間の関係が求まりました。

0.3 回折角のずれと軸発散との関係

見かけの回折角 2Θ と真の回折角 2θ とのずれを $\Delta \equiv 2\Theta - 2\theta$ と定義します。式 (10) は 2Θ について解けるので，厳密に

$$\Delta = \arccos\left(\frac{\cos 2\theta}{\cos\alpha\cos\beta} - \tan\alpha\tan\beta\right) - 2\theta \tag{11}$$

と書けますが，α と β が小さい角度の時には，Taylor 展開：

$$\begin{aligned}\Delta \;=\; & \Delta_0 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\right)_0 \alpha + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\right)_0 \beta \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha^2}\right)_0 \alpha^2 + \left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha\partial\beta}\right)_0 \alpha\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial\beta^2}\right)_0 \beta^2 \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{12}$$

により近似式が得られるはずです。この式で添字の 0 は,「$\alpha = \beta = 0$ のときの値」であることを意味します。

Δ_0, $(\partial\Delta/\partial\alpha)_0$, $(\partial\Delta/\partial\beta)_0$, $\left(\partial^2\Delta/\partial\alpha^2\right)_0$, $\left(\partial^2\Delta/\partial\alpha\partial\beta\right)_0$, $\left(\partial^2\Delta/\partial\beta^2\right)_0$ を求めるには，直接式 (11) から計算しても良いのですが，むしろ式 (10) を

$$\cos(2\Theta - \Delta) = \cos 2\Theta\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{13}$$

と書き直して計算した方が簡単です。

まず，式 (13) に $\alpha = \beta = 0$ を代入すると，

$$\cos(2\Theta - \Delta_0) = \cos 2\Theta \tag{14}$$

ですから，

$$\Delta_0 = 0 \tag{15}$$

であることはすぐにわかります。

式 (13) を α で偏微分すると，

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\sin(2\Theta - \Delta) = -\cos 2\Theta\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{16}$$

となりますから，これに $\alpha = \beta = 0$ と $\Delta_0 = 0$ を代入すると，

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\right)_0 \sin 2\Theta = 0 \tag{17}$$

したがって，$(\partial\Delta/\partial\alpha)_0 = 0$ となることがわかります。

一方，式 (13) を β で偏微分すると，

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\sin(2\Theta - \Delta) = -\cos 2\Theta\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \tag{18}$$

となり，これに $\alpha = \beta = 0$ と $\Delta_0 = 0$ を代入すれば，同じように $(\partial\Delta/\partial\beta)_0 = 0$ となることもわかります。

さらに，式 (16) をもう一回 α で偏微分すると，

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha^2}\sin(2\Theta-\Delta)-\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\right)^2\cos(2\Theta-\Delta)=-\cos 2\Theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{19}$$

となりますから，これに $\alpha=\beta=0$ と $\Delta_0=0$，$(\partial\Delta/\partial\alpha)_0=0$ を代入すると，

$$\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha^2}\right)_0\sin 2\Theta=-\cos 2\Theta \tag{20}$$

したがって，$\left(\partial^2\Delta/\partial\alpha^2\right)_0=-\cot 2\Theta$ となることがわかります。また，式 (18) をもう一回 β で微分すれば，まったく同じように $\left(\partial^2\Delta/\partial\beta^2\right)_0=-\cot 2\Theta$ が導かれます。

最後に，式 (16) を今度は β で偏微分すると，

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha\partial\beta}\sin(2\Theta-\Delta)-\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\cos(2\Theta-\Delta)=\cos 2\Theta\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta \tag{21}$$

となり，これに $\alpha=\beta=0$ と $\Delta_0=0$，$(\partial\Delta/\partial\alpha)_0=0$，$(\partial\Delta/\partial\beta)_0=0$ を代入すると，

$$\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha\partial\beta}\right)_0\sin 2\Theta=1 \tag{22}$$

したがって，$\left(\partial^2\Delta/\partial\alpha\partial\beta\right)_0=1/\sin 2\Theta$ となることがわかります。

結局，Δ の α と β についての 2 次の Taylor 展開として，

$$\Delta\simeq-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\tan 2\Theta}+\frac{\alpha\beta}{\sin 2\Theta} \tag{23}$$

という近似式が得られることがわかりました。

0.4 装置関数の形式

ディラックのデルタ関数を使えば，軸発散効果の装置関数 $w_{\mathrm{A}}(z)$ は

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{A}}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z-\Delta)f_{\mathrm{B}}(\alpha)f_{\mathrm{B}}(\beta)d\alpha\,d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(z+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\tan 2\Theta}-\frac{\alpha\beta}{\sin 2\Theta}\right)f_{\mathrm{B}}(\alpha)f_{\mathrm{B}}(\beta)d\alpha\,d\beta \end{aligned} \tag{24}$$

と書けます。

標準的な粉末 x 線回折計では入射側と回折側で等しい開き角のソーラースリットを用いるので，α と β についての強度分布は同じ関数で表されています。この場合には式 (24) は解くことができます。$t\equiv\tan\Theta$ とすれば，三角関数の倍角公式を使って，

$$\frac{1}{\tan 2\Theta} = \frac{1-\tan^2\Theta}{2\tan\Theta}=\frac{1-t^2}{2t} \tag{25}$$

$$\frac{1}{\sin 2\Theta} = \frac{1}{2\sin\Theta\cos\Theta}=\frac{1}{2\cos^2\Theta\tan\Theta}=\frac{1+t^2}{2t} \tag{26}$$

ですから，

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\tan 2\Theta}+\frac{\alpha\beta}{\sin 2\Theta} \\ &= -\frac{(\alpha^2+\beta^2)(1-t^2)}{4t}+\frac{\alpha\beta(1+t^2)}{2t} \\ &= -\frac{(\alpha-\beta)^2}{4t}+\frac{(\alpha+\beta)^2\,t}{4} \end{aligned} \tag{27}$$

と書けます。ここで，

$$\alpha \equiv \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \beta \equiv \frac{x-y}{\sqrt{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}, \quad y \equiv \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}} \tag{28}$$

とおくと，5 頁の式 (23) を書き直して，

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(x^2 t - \frac{y^2}{t}\right) \tag{29}$$

という簡単な式になります。また，一般的に積分 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$ について，

β を固定して $\alpha \equiv \sqrt{2}x - \beta$ とおけば $d\alpha = \sqrt{2}dx$ であり，

α	$-\infty$	$\longrightarrow$	∞
x	$-\infty$	$\longrightarrow$	∞

ですから，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)d\alpha d\beta &= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}x-\beta,\beta)dx\,d\beta \\
&= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}x-\beta,\beta)d\beta\,dx
\end{aligned}$$

また，x を固定して $\beta \equiv (x-y)/\sqrt{2}$ とおけば $d\beta = -dy/\sqrt{2}$ であり，

β	$-\infty$	$\longrightarrow$	∞
y	∞	$\longrightarrow$	$-\infty$

ですから，

$$\begin{aligned}
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{-\infty} f\left(\sqrt{2}x - \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) dy\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) dy\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) dx\,dy
\end{aligned} \tag{30}$$

と変形できるので，式 (24) と式 (29) から，

$$\begin{aligned}
w_{\mathrm{A}}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(z + \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\tan 2\Theta} - \frac{\alpha\beta}{\sin 2\Theta}\right) f_{\mathrm{B}}(\alpha) f_{\mathrm{B}}(\beta) d\alpha\,d\beta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(z - \frac{1}{2}\left(x^2 t - \frac{y^2}{t}\right)\right) f_{\mathrm{B}}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) f_{\mathrm{B}}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) dx\,dy
\end{aligned} \tag{31}$$

と書けるわけです。以下では式 (31) の積分を解いて装置関数の具体的な形式を求めます。

2 頁の図 2 と図 3 で示したような「Bartlett 窓」の場合について考えます。水平方向から角度 φ ずれたビームの強度は，

$$f_{\mathrm{B}}(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Phi}\left(1 - \dfrac{|\varphi|}{\Phi}\right) & (-\Phi < \varphi < \Phi \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{32}$$

という式で表されるのでした。図 6 から，式 (31) の y についての積分の範囲は $y : -\sqrt{2}\Phi \to \sqrt{2}\Phi$ であり，この y の値に応じて x についての積分範囲は $x : -\sqrt{2}\Phi + |y| \to \sqrt{2}\Phi - |y|$ となることがわかるでしょう。つまり，式 (31) は

$$w_{\mathrm{BB}}(z) = \frac{1}{\Phi^2}\int_{-\sqrt{2}\Phi}^{\sqrt{2}\Phi}\int_{-\sqrt{2}\Phi+|y|}^{\sqrt{2}\Phi-|y|} \delta\left(z - \frac{x^2 t}{2} + \frac{y^2}{2t}\right)\left(1 - \frac{|x+y|}{\sqrt{2}\Phi}\right)\left(1 - \frac{|x-y|}{\sqrt{2}\Phi}\right) dx\,dy \tag{33}$$

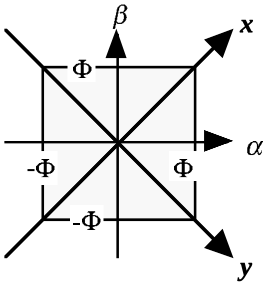

図 6: Bartlett 窓の場合の積分範囲

と書き換えられます。添字を BB としたのは,「二重の垂直 Bartlett 窓関数による」という意味です。

この式の y を $-y$ に入れ替えても同じ値をとることは容易にわかります。つまり，y についての被積分関数は y について偶関数ですから,

$$w_{\mathrm{BB}}(z) = \frac{2}{\Phi^2}\int_0^{\sqrt{2}\Phi}\int_{-\sqrt{2}\Phi+y}^{\sqrt{2}\Phi-y}\delta\left(z-\frac{x^2t}{2}+\frac{y^2}{2t}\right)\left(1-\frac{|x+y|}{\sqrt{2}\Phi}\right)\left(1-\frac{|x-y|}{\sqrt{2}\Phi}\right)dx\,dy \tag{34}$$

となります。さらに，x を $-x$ に入れ替えても同じ形になることから,

$$w_{\mathrm{BB}}(z) = \frac{4}{\Phi^2}\int_0^{\sqrt{2}\Phi}\int_0^{\sqrt{2}\Phi-y}\delta\left(z-\frac{x^2t}{2}+\frac{y^2}{2t}\right)\left(1-\frac{x+y}{\sqrt{2}\Phi}\right)\left(1-\frac{|x-y|}{\sqrt{2}\Phi}\right)dx\,dy \tag{35}$$

となることがわかります。

さらに，この式で t の代わりに $1/t$ を入れた場合に同時に z を $-z$ に入れ替えれば元と同じ形になります（δ 関数は偶関数と考えてかまいません）。つまり，t までパラメータとして含めて $w_{\mathrm{BB}}(z;t)$ と書くことにすれば,

$$w_{\mathrm{BB}}(z;t) = w_{\mathrm{BB}}(-z;1/t) \tag{36}$$

という関係があります。したがって，$0<t\le 1$ の場合の形だけ求めておけば，$1<t$ の場合の形式は上の式からただちに求められるでしょう。以下では $0<t\le 1$ の場合のみを考えることにします。

式 (35) について,

y を固定して $-z-y^2/2t+x^2t/2 \equiv u$ とおけば

$z+y^2/2t+u = x^2t/2 \Rightarrow x^2 = 2(z+u)/t+y^2/t^2 \Rightarrow x = \sqrt{2(z+u)t+y^2}/t$

また $txdx = du \Rightarrow dx = du/xt = du/\sqrt{2(z-u)t+y^2}$ であり,

x	0	$\longrightarrow$	$\sqrt{2}\Phi-y$
u	$-z-y^2/2t$	$\longrightarrow$	$-z-y^2/2t-\left(\sqrt{2}\Phi-y\right)^2t/2$

ですから,

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{BB}}(z) &= \frac{4}{\Phi^2}\int_0^{\sqrt{2}\Phi}\int_{-z+-y^2/2t}^{-z-y^2/2t+\left(\sqrt{2}\Phi-y\right)^2t/2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}\Phi}\left(\frac{\sqrt{2(z+u)t+y^2}}{t}+y\right)\right] \\ &\quad\times\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}\Phi}\left|\frac{\sqrt{2(z+u)t+y^2}}{t}-y\right|\right]\frac{\delta\,(-u)\,du}{\sqrt{2(z-u)t+y^2}}\,dy \end{aligned} \tag{37}$$

となりますが，δ-関数の性質から，一般的に

$$a \quad < \quad b \text{の場合,}$$
$$\int_a^b f(u)\delta(u)du = \int_a^b f(u)\delta(-u)du = \begin{cases} f(0) & (a < 0 < b \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{38}$$

ですから，式 (37) の積分が 0 でない値を持つのは，

$$\begin{aligned} & -z - \frac{y^2}{2t} < 0 < -z - \frac{y^2}{2t} + \frac{t}{2}\left(\sqrt{2}\Phi - y\right)^2 \\ \Longleftrightarrow & -\frac{y^2}{2t} < z < -\frac{y^2}{2t} + \frac{t}{2}\left(\sqrt{2}\Phi - y\right)^2 \end{aligned} \tag{39}$$

のときです。この領域は図 7 の中で太線で囲まれた領域として図示してあります。

さらに，式 (37) の中の絶対値記号をはずすときに符号が変わらない条件は，

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2(z+u)t+y^2}}{t} - y > 0 \\ \Longrightarrow & \; y < \frac{\sqrt{2zt+y^2}}{t} \\ \Longrightarrow & \; y^2 < \frac{2zt+y^2}{t^2} \\ \Longrightarrow & -y^2(1-t^2) < 2zt \\ \Longrightarrow & -\frac{y^2(1-t^2)}{2t} < z \end{aligned} \tag{40}$$

から，図 7 の中で破線で示した放物線より上の領域になります。

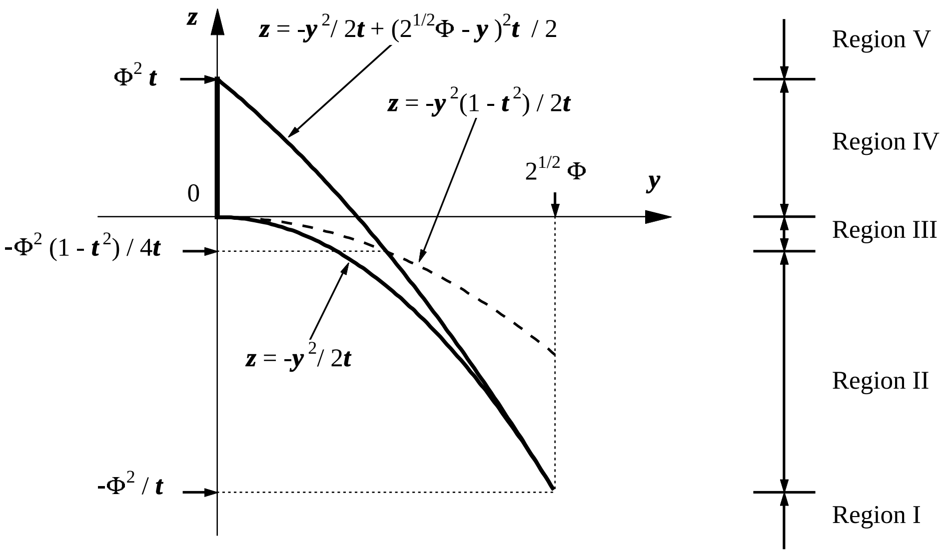

図 7: 式 (37) の積分が 0 でない値を持つための y, z の範囲。太線で囲まれた範囲で 0 でない値を持つ。破線の上（あるいは右）の領域では絶対値記号をはずすときに符号が変わらず，破線の下（あるいは左）の領域では符号が変わる。

また，$z < -\Phi^2/t$ (Region I) または $\Phi^2 t < z$ (Region V) のときには $w_{\rm BB}(z) = 0$ となり，$-\Phi^2/t \le z \le \Phi^2 t$ のときには，さらに z について 3 つの領域 (Region II, III, IV) に分けて考えなければならないことがわかります。

0.4.1　$0 \le z \le \Phi^2 t$ の場合

$0 < z < \Phi^2 t$ の領域は，図 7 で Region IV と示されています。y についての積分範囲の下限は 0 であり，上限を y_1 とすれば

$$\begin{aligned} z &= -\frac{y_1^2}{2t} + \frac{(y_1 - \sqrt{2}\Phi)^2 t}{2} \\ &= -\frac{y_1^2}{2t} + \frac{t}{2}(y_1^2 - 2\sqrt{2}\Phi y_1 + 2\Phi^2) \\ &= -\frac{1-t^2}{2t} y_1^2 - \sqrt{2}\Phi t y_1 + \Phi^2 t \\ &= \begin{cases} -\dfrac{1-t^2}{2t}\left(y_1 + \dfrac{\sqrt{2}\Phi t^2}{1-t^2}\right)^2 + \dfrac{\Phi^2 t}{1-t^2} & (t \ne 1 \text{ のとき}) \\ -\sqrt{2}\Phi\left(y_1 - \dfrac{\Phi}{\sqrt{2}}\right) & (t = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned} \tag{41}$$

となり，y_1 について解くと，$t=1$ のとき，

$$y_1 = \frac{\Phi^2 - z}{\sqrt{2}\Phi} \tag{42}$$

$t < 1$ のとき，

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\frac{2t}{1-t^2}\left(\frac{\Phi^2 t}{1-t^2} - z\right)} - \frac{\sqrt{2}\Phi t^2}{1-t^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\left[\sqrt{\Phi^2 t^2 - zt(1-t^2)} - \Phi t^2\right]}{1-t^2} \end{aligned} \tag{43}$$

と書けることがわかります。

さて，この積分範囲では式 (37) の中の絶対値記号をはずすときに符号は変化しません。したがって，

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^2}{4} w_{\rm BB}(z) &= \int_0^{y_1}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}\Phi}\left(\frac{\sqrt{2zt+y^2}}{t} + y\right)\right]\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}\Phi}\left(\frac{\sqrt{2zt+y^2}}{t} - y\right)\right]\frac{dy}{\sqrt{2zt+y^2}} \\ &= \int_0^{y_1}\left[1 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2zt+y^2}}{\Phi t} + \frac{1}{2\Phi^2}\left(\frac{2zt+y^2}{t^2} - y^2\right)\right]\frac{dy}{\sqrt{2zt+y^2}} \\ &= \int_0^{y_1}\left[\frac{1-t^2}{2\Phi^2 t^2}\sqrt{y^2+2zt} - \frac{\sqrt{2}}{\Phi t} + \left(1 + \frac{zt}{\Phi^2}\right)\frac{1}{\sqrt{y^2+2zt}}\right] dy \\ &= \frac{1-t^2}{2\Phi^2 t^2}\int_0^{y_1}\sqrt{y^2+2zt}\, dy - \frac{\sqrt{2}}{\Phi t} y_1 + \left(1 + \frac{zt}{\Phi^2}\right)\int_0^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{y^2+2zt}} \end{aligned} \tag{44}$$

となるのですが，この式は以下の不定積分についての公式

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right] \tag{45}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) \tag{46}$$

を用いれば解ける形になっています。つまり，

$$V_-(y) \equiv \frac{1-t^2}{4\Phi^2 t^2}\int \sqrt{y^2+2zt} dy - \frac{\sqrt{2}}{\Phi t}\int dy + \left(1 + \frac{zt}{\Phi^2}\right)\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+2zt}} \tag{47}$$

と定義すれば，

$$\begin{aligned} V_-(y) &= \frac{1-t^2}{2\Phi^2t^2}\left[y\sqrt{y^2+2zt}+2zt\ln\left(y+\sqrt{y^2+2zt}\right)\right] \\ &\quad -\frac{\sqrt{2}}{\Phi t}y+\left(1+\frac{zt}{\Phi^2}\right)\ln\left(y+\sqrt{y^2+2zt}\right) \\ &= \frac{1-t^2}{4\Phi^2t^2}y\sqrt{y^2+2zt}-\frac{\sqrt{2}}{\Phi t}y \\ &\quad +\left(1+\frac{z(1+t^2)}{2\Phi^2 t}\right)\ln\left(y+\sqrt{y^2+2zt}\right) \\ &= \frac{y}{\Phi}\left[\frac{1-t^2}{4t^2}\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2+\frac{2zt}{\Phi^2}}-\frac{\sqrt{2}}{t}\right] \\ &\quad +\left(1+\frac{z(1+t^2)}{2\Phi^2 t}\right)\ln\left(y+\sqrt{y^2+2zt}\right) \end{aligned} \tag{48}$$

であり，

$$\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}}(z)=V_-(y_1)-V_-(0) \tag{49}$$

という解が得られます。

以下にこの解の具体的な形を求めます。

$$u\equiv\frac{z}{\Phi^2 t} \tag{50}$$

を定義すると，

$$\begin{aligned} V_-(y) &= \frac{y}{\Phi}\left[\frac{1-t^2}{4t^2}\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2+2ut^2}-\frac{\sqrt{2}}{t}\right] \\ &\quad +\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\left[\ln\left(\frac{y}{\Phi}+\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2+2ut^2}\right)+\ln\Phi\right] \end{aligned} \tag{51}$$

となりますが，定数項（y によらず一定の項）は任意に選べるので，ここでは

$$\begin{aligned} V_-(y) &= \frac{y}{\Phi}\left[\frac{1-t^2}{4t^2}\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2+2ut^2}-\frac{\sqrt{2}}{t}\right] \\ &\quad +\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\frac{y}{\Phi}+\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2+2ut^2}\right) \end{aligned} \tag{52}$$

とすることにします。

$t=1$ のとき式 (42) から

$$\frac{y_1}{\Phi} = \frac{1-u}{\sqrt{2}} \tag{53}$$

$$\sqrt{\left(\frac{y_1}{\Phi}\right)^2+2ut^2} = \sqrt{\frac{(1-u)^2}{2}+2u}=\frac{1+u}{\sqrt{2}} \tag{54}$$

したがって，式 (52) から

$$V_-(y_1) = -(1-u)+(1+u)\ln\sqrt{2} \tag{55}$$

$$
\begin{aligned}
V_-(0) &= (1+u)\ln\sqrt{2u} && (56)\\
\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}} &= V_-(y_1)-V_-(0)\\
&= -(1-u)+(1+u)\ln\sqrt{2}-(1+u)\ln\sqrt{2u}\\
&= -1+u-\frac{1}{2}(1+u)\ln u && (57)
\end{aligned}
$$

$t<1$ のとき式 (43) から

$$
\begin{aligned}
\frac{y_1}{\Phi} &= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\Phi^2t^2-zt(1-t^2)}-\Phi t^2\right)}{\Phi\,(1-t^2)}\\
&= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{t^2-ut^2(1-t^2)}-t^2\right)}{1-t^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}t\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}-t\right)}{1-t^2} && (58)\\
\left(\frac{y_1}{\Phi}\right)^2+2ut^2 &= \frac{2t^2}{(1-t^2)^2}\left[1-u(1-t^2)+t^2-2t\sqrt{1-u(1-t^2)}+u(1-t^2)^2\right]\\
&= \frac{2t^2}{(1-t^2)^2}\left[1+t^2-ut^2(1-t^2)-2t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right]\\
&= \frac{2t^2\left(1-t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)^2}{(1-t^2)^2} && (59)
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
-\frac{\Phi^2}{t}<z<\Phi^2 t &\implies -\frac{1}{t^2}<u<1\\
&\implies -\frac{1-t^2}{t^2}<u(1-t^2)<1-t^2\\
&\implies t^2<1-u(1-t^2)<\frac{1}{t^2}\\
&\implies t<\sqrt{1-u(1-t^2)}<\frac{1}{t}\\
&\implies -1<-t\sqrt{1-u(1-t^2)}<\frac{1}{t}\\
&\implies 0<1-t\sqrt{1-u(1-t^2)}<t^2
\end{aligned}
$$

ですから，

$$
\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2+2ut^2} = \frac{\sqrt{2}t\left(1-t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1-t^2} \qquad (60)
$$

と書けます。さらに，

$$
\begin{aligned}
\frac{y_1}{\Phi}+\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2+2ut^2} &= \frac{\sqrt{2}t\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}-t\right)}{1-t^2}+\frac{\sqrt{2}t\left(1-t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1-t^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}t\left[(1-t)+(1-t)\sqrt{1-u(1-t^2)}\right]}{1-t^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}t\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1+t} && (61)
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
\frac{y_1}{\Phi}\left[\frac{1-t^2}{4t^2}\sqrt{\left(\frac{y_1}{\Phi}\right)^2+2ut^2}-\frac{\sqrt{2}}{t}\right] &= \frac{y_1}{\Phi}\left[\frac{1-t^2}{4t^2}\frac{\sqrt{2}t\left(1-t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1-t^2}-\frac{\sqrt{2}}{t}\right] \\
&= -\frac{\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}-t\right)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2(1-t^2)} \\
&= -\frac{\left[1-u(1-t^2)-t^2\right]\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2(1-t^2)\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)} \\
&= -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)} \qquad (62)
\end{aligned}
$$

となります。したがって，

$$
\begin{aligned}
V_-(y_1) &= -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)} \\
&\quad +\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{\sqrt{2}t\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1+t} \qquad (63) \\
V_-(0) &= \left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\sqrt{2u}t \qquad (64) \\
\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}} &= V_-(y_1)-V_-(0) \\
&= -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)} \\
&\quad +\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\left[\ln\frac{\sqrt{2}t\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1+t}-\ln\sqrt{2u}t\right] \\
&= -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)}+\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{1+\sqrt{1-u(1-t^2)}}{\sqrt{u}(1+t)} \qquad (65)
\end{aligned}
$$

という結果が得られます。式 (57) と比較すれば，この式は $t=1$ のときにも使えることがわかります。

念のために，$z=\Phi^2 t \Longleftrightarrow u=1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}}(\Phi^2 t) &= \left(1+\frac{1+t^2}{2}\right)\ln\frac{1+\sqrt{t^2}}{1+t} \\
&= 0 \qquad (66)
\end{aligned}
$$

となることを確認しておきます。

0.4.2 $-\Phi^2/t \le z \le -\Phi^2(1-t^2)/4t$ の場合

$-\Phi^2/t \le z \le -\Phi^2(1-t^2)/4t$ の領域は，8 頁の図 7 中，"Region II" と示されています。この図からわかるように，y についての積分範囲の上限は前節の y_1 と同じですが，下限を y_2 とすれば

$$y_2 = \sqrt{-2zt} \tag{67}$$

となっています。また，この積分範囲では式 (37) の中の絶対値記号をはずすときに符号が変化します。したがって，

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi^2}{4} w_{\mathrm{BB}}(z) &= \int_{y_2}^{y_1} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}\Phi}\left(\frac{\sqrt{2zt+y^2}}{t} + y\right)\right]\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}\Phi}\left(\frac{\sqrt{2zt+y^2}}{t} - y\right)\right]\frac{dy}{\sqrt{2zt+y^2}} \\
&= \int_{y_2}^{y_1} \left[1 - \frac{\sqrt{2}y}{\Phi} - \frac{1}{2\Phi^2}\left(\frac{2zt+y^2}{t^2} - y^2\right)\right]\frac{dy}{\sqrt{2zt+y^2}} \\
&= \int_{y_2}^{y_1} \left[-\frac{1-t^2}{2\Phi^2 t^2}\sqrt{y^2+2zt} - \frac{\sqrt{2}}{\Phi}\frac{y}{\sqrt{y^2+2zt}} + \left(1 - \frac{zt}{\Phi^2}\right)\frac{1}{\sqrt{y^2+2zt}}\right] dy \\
&= -\frac{1-t^2}{2\Phi^2 t^2}\int_{y_2}^{y_1} \sqrt{y^2+2zt}\, dy - \frac{\sqrt{2}}{\Phi}\int_{y_2}^{y_1} \frac{y}{\sqrt{y^2+2zt}} dy + \left(1 - \frac{zt}{\Phi^2}\right)\int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y^2+2zt}}
\end{aligned} \tag{68}$$

となりますが，前節で使った公式と，さらに

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} \tag{69}$$

という公式を用いれば解ける形になっています。つまり，

$$\begin{aligned}
V_+(y) &\equiv -\frac{1-t^2}{4\Phi^2 t^2}\left[y\sqrt{y^2+2zt} + 2zt \ln\left(y + \sqrt{y^2+2zt}\right)\right] \\
&\quad -\frac{\sqrt{2}}{\Phi}\sqrt{y^2+2zt} + \left(1 - \frac{zt}{\Phi^2}\right)\ln\left(y + \sqrt{y^2+2zt}\right) \\
&= -\frac{1-t^2}{4\Phi^2 t^2} y\sqrt{y^2+2zt} - \frac{\sqrt{2}}{\Phi}\sqrt{y^2+2zt} \\
&\quad + \left[-\frac{z(1-t^2)}{2\Phi^2 t} + 1 - \frac{zt}{\Phi^2}\right]\ln\left(y + \sqrt{y^2+2zt}\right) \\
&= -\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2 + \frac{2zt}{\Phi^2}}\left(\frac{1-t^2}{4t^2}\frac{y}{\Phi} + \sqrt{2}\right) \\
&\quad + \left[1 - \frac{z(1+t^2)}{2\Phi^2 t}\right]\ln\left(y + \sqrt{y^2+2zt}\right)
\end{aligned} \tag{70}$$

と定義すれば，

$$\frac{\Phi^2}{4} w_{\mathrm{BB}}(z) = V_+(y_1) - V_+(y_2) \tag{71}$$

という解の形式を持つことがわかります。

以下に具体的な形を求めます。再び

$$u \equiv \frac{z}{\Phi^2 t} \tag{72}$$

を定義すると，

$$V_+(y) = -\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2}\left(\frac{1-t^2}{4t^2}\frac{y}{\Phi} + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\frac{y}{\Phi} + \sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2}\right) \tag{73}$$

ですが，式 (67) から

$$\frac{y_2}{\Phi} = \frac{\sqrt{-2zt}}{\Phi} = \sqrt{-2ut} \tag{74}$$

であり，

$$\sqrt{\left(\frac{y_2}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2} = 0 \tag{75}$$

となります。したがって，

$$V_+(y_2) = \left(1 - \frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\sqrt{-2ut} \tag{76}$$

ところで，

$$\frac{y_1}{\Phi} = \begin{cases} \dfrac{1-u}{\sqrt{2}} & (t = 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\sqrt{2}t\left(\sqrt{1-u(1-t^2)} - t\right)}{1-t^2} & (t < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\sqrt{\left(\frac{y_1}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2} = \begin{cases} \dfrac{1+u}{\sqrt{2}} & (t = 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\sqrt{2}t\left(1 - t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1-t^2} & (t < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\frac{y_1}{\Phi} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2} = \frac{\sqrt{2}t\left(1 + \sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1+t}$$

でした。また，$t = 1$ のとき

$$-\sqrt{\left(\frac{y_1}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2}\left(\frac{1-t^2}{4t^2}\frac{y_1}{\Phi} + \sqrt{2}\right) = -\frac{1+u}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = -(1+u) \tag{77}$$

ですが，$t < 1$ のとき

$$\begin{aligned} -\sqrt{\left(\frac{y_1}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2}\left(\frac{1-t^2}{4t^2}\frac{y_1}{\Phi} + \sqrt{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2}t\left(1 - t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1-t^2} \\ &\quad \times \left[\frac{1-t^2}{4t^2}\frac{\sqrt{2}t\left(\sqrt{1-u(1-t^2)} - t\right)}{1-t^2} + \sqrt{2}\right] \\ &= -\frac{1 - t\sqrt{1-u(1-t^2)}}{1-t^2}\frac{\sqrt{1-u(1-t^2)} + 3t}{2} \\ &= -\frac{\left\{1 - t^2\left[1-u(1-t^2)\right]\right\}\left(3t + \sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2(1-t^2)\left(1 + t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)} \\ &= -\frac{(1+ut^2)\left(3t + \sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(1 + t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)} \end{aligned} \tag{78}$$

となります。この最後の式は，$t=1$ のときにも使えます。

以上のことから，

$$\begin{aligned}V_+(y_1) &= -\frac{(1+ut^2)\left(3t+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(1+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)} \\ &\quad +\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{\sqrt{2}t\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1+t} \end{aligned} \tag{79}$$

となります。したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}}(z) &= V_+(y_1)-V_+(y_2) \\ &= -\frac{(1+ut^2)\left(3t+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(1+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)} \\ &\quad +\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{\sqrt{2}t\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1+t} \\ &\quad -\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\sqrt{-2ut} \\ &= -\frac{(1+ut^2)\left(3t+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(1+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)} \\ &\quad +\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{1+\sqrt{1-u(1-t^2)}}{\sqrt{-u}(1+t)} \end{aligned} \tag{80}$$

という結果が得られます。

念のために，$z=-\Phi^2/t \Longleftrightarrow u=-1/t^2$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}}(-\Phi^2/t) &= -\frac{(1-t^2/t^2)\left(3t+\sqrt{1+(1-t^2)/t^2}\right)}{2\left(1+t\sqrt{1+(1-t^2)/t^2}\right)} \\ &\quad +\left(1+\frac{1+t^2}{2}\frac{1}{t^2}\right)\ln\frac{1+\sqrt{1+1/t^2-1)}}{\sqrt{1/t^2}(1+t)} \\ &= \left(1+\frac{1+t^2}{2}\frac{1}{t^2}\right)\ln\frac{1+1/t}{(1+t)/t} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{81}$$

となることを確認しておきます。

0.4.3 $-\Phi^2(1-t^2)/4t < z < 0$ の場合

この領域は $t=1$ のときには存在せず， $t\neq 1$ のときのみに出現します。ここでは $t\leq 1$ に限って考えれば良いのでした。$t<1$ のときには，8 頁の図 7 中，”Region III” で表される領域になります。この領域では, 積分を計算する際に y について二つの領域にわけて考える必要があります。はじめに，絶対値記号をはずすときに符号の変わる領域の下限は前節にも現れた

$$\begin{aligned} y_2 &= \sqrt{-2zt} \\ \frac{y_2}{\Phi} &= \sqrt{-2ut} \end{aligned}$$

ですが，上限は

$$
\begin{aligned}
y_3 &= \sqrt{\frac{-2zt}{1-t^2}} \\
\frac{y_3}{\Phi} &= \sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t
\end{aligned}
\tag{82}
$$

となることに注意します。絶対値記号をはずすときに符号の変わらない領域は

$$y_3 < y < y_1$$

変わる領域は

$$y_2 < y < y_3$$

と書けます。したがって，

$$\frac{\Phi^2}{4} w_{\mathrm{BB}}(z) = V_-(y_1) - V_-(y_3) + V_+(y_3) - V_+(y_2) \tag{83}$$

となります。既に $V_-(y_1)$ と $V_+(y_2)$ の形は導いてありますので，ここでは $V_-(y_3)$ と $V_+(y_3)$ だけを求めればよいということになります。

$$
\begin{gathered}
\frac{y_3}{\Phi} = \sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t \\
\sqrt{\left(\frac{y_3}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2} = \sqrt{\frac{-2ut^2}{1-t^2} + 2ut^2} = \sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t^2
\end{gathered}
\tag{84}
$$

を式 (52) の

$$
\begin{aligned}
V_-(y) &= \frac{y}{\Phi}\left[\frac{1-t^2}{4t^2}\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2} - \frac{\sqrt{2}}{t}\right] \\
&\quad + \left(1 + \frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\frac{y}{\Phi} + \sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2}\right)
\end{aligned}
$$

に代入すれば，

$$
\begin{aligned}
V_-(y_3) &= \sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t\left(\frac{1-t^2}{4}\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}} - \frac{\sqrt{2}}{t}\right) \\
&\quad + \left(1 + \frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t(1+t)\right) \\
&= -\frac{ut}{2} - 2\sqrt{\frac{-u}{1-t^2}} + \left(1 + \frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t(1+t)\right)
\end{aligned}
\tag{85}
$$

また式 (73) の

$$
\begin{aligned}
V_+(y) &= -\sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2}\left(\frac{1-t^2}{4t^2}\frac{y}{\Phi} + \sqrt{2}\right) \\
&\quad + \left(1 - \frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\frac{y}{\Phi} + \sqrt{\left(\frac{y}{\Phi}\right)^2 + 2ut^2}\right)
\end{aligned}
\tag{86}
$$

から，

$$
\begin{aligned}
V_+(y_3) &= -\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t^2\left(\frac{1-t^2}{4t^2}\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t+\sqrt{2}\right) \\
&\quad +\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t(1+t)\right) \\
&= \frac{ut}{2}-2\sqrt{\frac{-u}{1-t^2}}t^2+\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t(1+t)\right) \qquad (87)
\end{aligned}
$$

さらに，12 頁で

$$
\begin{aligned}
V_-(y_1) &= -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)} \\
&\quad +\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{\sqrt{2}t\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1+t}
\end{aligned}
$$

14 頁で

$$
V_+(y_2)=\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\sqrt{-2ut}
$$

であったことから，

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}}(z) &= V_-(y_1)-V_-(y_3)+V_+(y_3)-V_+(y_2) \\
&= -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)} \\
&\quad +\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{\sqrt{2}t\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1+t} \\
&\quad +\frac{ut}{2}+2\sqrt{\frac{-u}{1-t^2}}-\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t(1+t)\right) \\
&\quad +\frac{ut}{2}-2\sqrt{\frac{-u}{1-t^2}}t^2+\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t(1+t)\right) \\
&\quad -\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\sqrt{-2ut} \\
&= -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)}+ut+2\sqrt{-u(1-t^2)} \\
&\quad +\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{\sqrt{2}t\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{1+t} \\
&\quad -\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t(1+t)\right) \\
&\quad +\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\left(\sqrt{\frac{-2u}{1-t^2}}t(1+t)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\sqrt{-2ut} \\
= \quad & -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)}+ut+2\sqrt{-u(1-t^2)} \\
& +\ln\frac{1+\sqrt{1-u(1-t^2)}}{\sqrt{-u}(1+t)} \\
& +\frac{1+t^2}{2}u\ln\frac{(1-t)\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{\sqrt{-u}(1+t)^2} \qquad (88)
\end{aligned}
$$

となります。これでやっと解くことができました。

0.4.4 まとめ

以上のことをまとめると，z と Φ, $t\equiv\tan\theta$ とから

$$u\equiv\frac{z}{\Phi^2 t} \qquad (89)$$

によって定義される u を使って，$t<1$ のときの装置関数の形は以下のように表現できます。

Region I: $z\le -\Phi^2/t$ のとき

$$w_{\mathrm{BB}}(z)=0 \qquad (90)$$

Region II: $-\Phi^2/t<z\le-\Phi^2(1-t^2)/4t$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}}(z) \quad = \quad & -\frac{(1+ut^2)\left(3t+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(1+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)} \\
& +\left(1-\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{1+\sqrt{1-u(1-t^2)}}{\sqrt{-u}(1+t)} \qquad (91)
\end{aligned}
$$

Region III: $-\Phi^2(1-t^2)/4t<z<0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}}(z) \quad = \quad & -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)}+ut+2\sqrt{-u(1-t^2)} \\
& +\ln\frac{1+\sqrt{1-u(1-t^2)}}{\sqrt{-u}(1+t)} \\
& +\frac{1+t^2}{2}u\ln\frac{(1-t)\left(1+\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{\sqrt{-u}(1+t)^2} \qquad (92)
\end{aligned}
$$

Region IV: $0<z\le\Phi^2 t$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi^2}{4}w_{\mathrm{BB}}(z) \quad = \quad & -\frac{(1-u)\left(3+t\sqrt{1-u(1-t^2)}\right)}{2\left(\sqrt{1-u(1-t^2)}+t\right)} \\
& +\left(1+\frac{1+t^2}{2}u\right)\ln\frac{1+\sqrt{1-u(1-t^2)}}{\sqrt{u}(1+t)} \qquad (93)
\end{aligned}
$$

Region V: $\Phi^2 t\le z$ のとき，

$$w_{\mathrm{BB}}(z)=0 \qquad (94)$$

また，$t>1$ のときの解は $w_{\mathrm{BB}}(z;t)=w_{\mathrm{BB}}(-z;1/t)$ の関係から得られます。