フーリエ変換の公式

Theorems for Fourier transformation

　フーリエ変換 Fourier transform がわかりにくい理由の一つに，定義のしかたに色々な流儀があって，公式を使うのも単純ではないという面があります。ここでは以下の定義に統一します。関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(k)$ とすれば，

Fourier 変換： $$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi ikx}dx$$

逆 Fourier 変換： $$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-2\pi ikx}dk$$

この定義は結晶学の分野で伝統的に使われてきましたし，W. H. Press らの「Numerical Recipes in C」（技術評論社，1995 年）でも推奨されている定義のしかたです。

　このように定義しておくと，数値計算の際に便利なようなのですが，以下のような利点もあります。

(i) 畳み込みや相関の公式が簡単になる。

(ii) デルタ関数の Fourier 変換が 1 になる。

(iii) Fourier 変換の原点での値が関数の面積に等しくなる。

他の定義のしかたについては最後に触れることにします。

超関数のフーリエ変換

　Dirac のデルタ関数 $\delta(x)$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx=f(0)$$

という性質から，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{2\pi ikx}dx=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-2\pi ikx}dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx}dk=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ikx}dk=\delta(x)$$

という簡単な関係が成り立ちます。つまり，デルタ関数の Fourier 変換は 1 になり，　1 の Fourier 変換がデルタ関数です。

　デルタ関数の微分 $\delta'(x)$ の Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) e^{2\pi ikx} dx = \left[\delta(x) e^{2\pi ikx}\right]_{-\infty}^{\infty} - 2\pi ik \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{2\pi ikx} dx = 2\pi ik$$

デルタ関数の n 階微分 $\delta^{(n)}(x) = \dfrac{d^n \delta(x)}{dx^n}$ の Fourier 変換は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) e^{2\pi ikx} dx = \left[\delta^{(n-1)}(x) e^{2\pi ikx}\right]_{-\infty}^{\infty} - 2\pi ik \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(x) e^{2\pi ikx} dx$$

$$= -2\pi ik \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(x) e^{2\pi ikx} dx$$

から，一般的に

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) e^{2\pi ikx} dx = \left(-2\pi ik\right)^n$$

と書けます。

畳み込みと相関

２つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の**畳み込み (convolution)** は

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

で定義されます。「畳み込み」の代わりに接合積とか合成積と呼ばれることもあります。デルタ関数の性質から，ある関数をデルタ関数と畳み込んだ結果は元の関数と必ず等しくなることは容易にわかります。関数 $f(x)$，$g(x)$ それぞれの Fourier 変換が

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi ikx} dx$$

$$G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{2\pi ikx} dx$$

であるとします。畳み込みの Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) * g(x)\right] e^{2\pi ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy\right\} e^{2\pi ikx} dx$$

ということになりますが，積分の順序を交換すれば,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{2\pi ikx} dx\right\} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{2\pi ik(x-y)} dx\right\} e^{2\pi iky} dy$$

$$= F(k)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{2\pi iky}dy$$

$$= F(k)G(k)$$

となります。つまり，畳み込みの Fourier 変換は Fourier 変換の積に等しくなります。これを**畳み込み定理** (convolution theorem) と呼びます。

２つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の**相関 (correlation)** は

$$\mathrm{Corr}\left[f(x), g(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(y)dy$$

で定義されます。これは $f(x)$ と $g(-x)$ との畳み込みと同じことです。相関の Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Corr}\left[f(x), g(x)\right]e^{2\pi ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(y)dy\right]e^{2\pi ikx}dx$$

となりますが，積分の順序を交換すれば,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)e^{2\pi ikx}dx\right]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)e^{2\pi ik(x+y)}dx\right]e^{-2\pi iky}dy$$

$$= F(k)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-2\pi iky}dy$$

$$= F(k)G(-k)$$

となります。さらに，関数 $g(x)$ が実関数（実数値を取る関数）の場合には, $G(-k) = G^*(k)$（ただし $G^*(k)$ は $G(k)$ の複素共役）という関係があるので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Corr}\left[f(x), g(x)\right]e^{2\pi ikx}dx = F(k)G^*(k)$$

という関係が成り立ちます。つまり，相関の Fourier 変換は， Fourier 変換と Fourier 変換の複素共役との積に等しくなります。この関係は**相関定理** (correlation theorem) と呼ばれます。

特に $g(x)$ が $f(x)$ に等しいとき,

$$\mathrm{Corr}\left[f(x), f(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)f(y)dy$$

のことを**自己相関** (autocorrelation) と呼びます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Corr}\left[f(x), f(x)\right] e^{2\pi ikx} dx = F(k)F^*(k) = \left|F(k)\right|^2$$

という関係がただちに導かれますが，この関係は**ウィーナーーヒンチン (Wiener-Khinchin) の定理**と呼ばれます。

信号の全パワー (total power) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) f(x) dx$$

で表されますが，信号のフーリエ変換について同様の計算をしても，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(k)\right|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(k) F(k) dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-2\pi ikx} dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{2\pi iky} dy\right] dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ik(y-x)} dk dy dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(y-x) dy dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) f(x) dx$$

となって，同じ結果が得られます。このことを**パーセバル (Parseval) の定理**と言います。

関数の面積とフーリエ変換

任意の関数 $f(x)$ について，Fourier 変換の原点での値は

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

という関係から，関数 $f(x)$ の面積を表します。関数 $f(x)$ が規格化されている（面積が 1 である）とすれば， Fourier 変換の原点での値が 1 になります。

初等関数のフーリエ変換

$f(x)$		$F(k)$	
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma}\exp\left(-\dfrac{x^2}{\sigma^2}\right)$	(Gauss 型関数)	$\exp\left[-\pi^2 k^2 \sigma^2\right]$	(Gauss 型関数)
$\dfrac{1}{\pi\gamma}\left[1+\left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^2\right]^{-1}$	(Lorentz 型関数)	$\exp\left[-2\pi\gamma\lvert k\rvert\right]$	(対称化指数関数)
$\dfrac{1}{2\lambda}\exp\left(-\dfrac{\lvert x\rvert}{\lambda}\right)$	(対称化指数関数)	$\dfrac{1}{1+4\pi^2k^2\lambda^2}$	(Lorentz 型関数)
$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau} & \left(\lvert x\rvert < \dfrac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \left(\lvert x\rvert \geq \dfrac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	(矩形関数)	$\dfrac{\sin(\pi k \tau)}{\pi k \tau}$	
$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}\left(1-\dfrac{\lvert x\rvert}{\tau}\right) & \left[\lvert x\rvert < \tau\right] \\ 0 & \left[\lvert x\rvert \geq \tau\right]\end{cases}$	(Bartlett 型関数)	$\dfrac{\sin^2(\pi k \tau)}{\pi^2 k^2 \tau^2}$	
$\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right) & \left[x > 0\right] \\ 0 & \left[x \leq 0\right]\end{cases}$	(打切り型指数関数)	$\dfrac{1}{1-2\pi i k \lambda}$	

半無限区間で定義された指数関数のフーリエ変換は，以下のように解くことができます。まず，

$$\int_0^\infty e^{-x/\lambda}\cos(2\pi kx)\,dx = \left[-\lambda e^{-x/\lambda}\cos(2\pi kx)\right]_0^\infty - 2\pi k\lambda\int_0^\infty e^{-x/\lambda}\sin(2\pi kx)\,dx$$

$$= \lambda - 2\pi k\lambda\left\{\left[-\lambda e^{-x/\lambda}\sin(2\pi kx)\right]_0^\infty + 2\pi k\lambda\int_0^\infty e^{-x/\lambda}\cos(2\pi kx)\,dx\right\}$$

$$= \lambda - 4\pi^2k^2\lambda^2\int_0^\infty e^{-x/\lambda}\cos(2\pi kx)\,dx$$

から，

$$\int_0^\infty e^{-x/\lambda}\cos(2\pi kx)\,dx = \frac{\lambda}{1+4\pi^2k^2\lambda^2}$$

です。また，

$$\int_0^\infty e^{-x/\tau}\sin(2\pi kx)\,dx = \left[-\tau e^{-x/\tau}\sin(2\pi kx)\right]_0^\infty + 2\pi k\tau\int_0^\infty e^{-x/\tau}\cos(2\pi kx)\,dx$$

$$= 2\pi k\tau\left\{\left[-\tau e^{-x/\tau}\cos(2\pi kx)\right]_0^\infty - 2\pi k\tau\int_0^\infty e^{-x/\tau}\sin(2\pi kx)\,dx\right\}$$

$$= 2\pi k\tau^2 - 4\pi^2k^2\tau^2\int_0^\infty e^{-x/\tau}\cos(2\pi kx)\,dx$$

から，

$$\int_0^\infty e^{-x/\tau}\sin(2\pi kx)\,dx = \frac{2\pi k\tau^2}{1+4\pi^2k^2\tau^2}$$

です。したがって，

$$\int_0^\infty \frac{1}{\tau}e^{-x/\tau}e^{2\pi ikx}\,dx = \frac{1+2\pi ik\tau}{1+4\pi^2k^2\tau^2} = \frac{1}{1-2\pi ik\tau}$$

となります。

有限区間でのみ 0 でない値を持つ整級数多項式のフーリエ変換は解くことができます。例えば，有限区間で 1 という値を持つ関数のフーリエ変換は

$$\int_\alpha^\beta e^{2\pi ikx}\,dx = \frac{e^{2\pi ik\beta} - e^{2\pi ik\alpha}}{2\pi ik}$$

となりますし，有限区間でのみ x という値をとる関数のフーリエ変換は

$$\int_\alpha^\beta x e^{2\pi ikx}\,dx = \left[\frac{x}{2\pi ik}e^{2\pi ikx}\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{2\pi ik}\int_\alpha^\beta e^{2\pi ikx}\,dx$$

$$= \frac{\beta e^{2\pi ik\beta} - \alpha e^{2\pi ik\alpha}}{2\pi ik} + \frac{e^{2\pi ik\beta} - e^{2\pi ik\alpha}}{4\pi^2k^2}$$

となります。一般的に，有限区間で x^n という値をとる関数のフーリエ変換は

$$\int_\alpha^\beta x^n e^{2\pi ikx}\,dx = \left[\frac{x^n}{2\pi ik}e^{2\pi ikx}\right]_\alpha^\beta - \frac{n}{2\pi ik}\int_\alpha^\beta x^{n-1}e^{2\pi ikx}\,dx$$

$$= \frac{\beta^n e^{2\pi ik\beta} - \alpha^n e^{2\pi ik\alpha}}{2\pi ik} - \frac{n}{2\pi ik}\int_\alpha^\beta x^{n-1}e^{2\pi ikx}\,dx$$

となって，有限区間で x^{n-1} という値をとる関数のフーリエ変換から導かれます。以下にいくつかの例をあげます。

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{1}{\alpha} e^{2\pi ikx} dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha/2} \cos(2\pi kx) dx = \frac{\sin(\pi k\alpha)}{\pi k\alpha}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right) e^{2\pi ikx} dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cos(2\pi kx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi k\alpha}\left\{ \left[\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\sin(2\pi kx)\right]_0^{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \sin(2\pi kx) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi k\alpha^2}\left[-\frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k}\right]_0^{\alpha} = \frac{1 - \cos(2\pi k\alpha)}{2\pi^2 k^2 \alpha^2} = \frac{\sin^2(\pi k\alpha)}{\pi^2 k^2 \alpha^2}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{3}{4\alpha}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) e^{2\pi ikx} dx = \frac{3}{2\alpha} \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \cos(2\pi kx) dx$$

$$= \frac{3}{4\pi k\alpha}\left\{ \left[\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)\sin(2\pi kx)\right]_0^{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\int_0^{\alpha} x\sin(2\pi kx) dx \right\}$$

$$= \frac{3}{2\pi k\alpha^3}\left\{ \left[-\frac{x\cos(2\pi kx)}{2\pi k}\right]_0^{\alpha} + \frac{1}{2\pi k}\int_0^{\alpha} \cos(2\pi kx) dx \right\}$$

$$= \frac{3}{4\pi^2 k^2 \alpha^3}\left\{ -\alpha\cos(2\pi k\alpha) + \left[\frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k}\right]_0^{\alpha} \right\}$$

$$= \frac{3}{4\pi^2 k^2 \alpha^2}\left\{ -\cos(2\pi k\alpha) + \frac{\sin(2\pi k\alpha)}{2\pi k\alpha} \right\}$$

フーリエ変換の種々の定義のしかた

例えば，以下のような定義のしかたは実際に公式集で使われているものです。

1．「岩波数学公式 II 級数・フーリエ解析」（岩波書店，1957 年）

Fourier 変換：$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx$

Fourier の積分公式：$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy$

2．「岩波数学辞典」（岩波書店，1960 年）

Fourier 変換： $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$

Fourier 逆変換： $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{ix\omega} d\omega$

３．「共立数学公式」（共立出版，1969 年）：以下の２つの式が両方ともフーリエ変換と呼ばれています。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-ixu} du$$

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itu} dt$$

このほかに，

Fourier 変換： $F(k) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikx} dx$

Fourier 逆変換： $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$

という定義のしかたもあります。