2018 年 5 月 6 日（日）作成

2018 年 10 月 16 日（火）更新

180º 回転すると円柱に見えたり正方柱に見えたりする立体を紙細工で作る

名古屋工業大学 先進セラミックス研究センター

井田　隆

1．はじめに

明治大学研究・知財戦略機構の杉原厚吉特任教授が 3Dプリントを用いて作成したとされる「Ambiguous Cylinder Illusion」という作品が話題になった。180º 回転すると円柱に見えたり正方柱に見えたりするもので，どうしたらそのような立体を作れるか，すぐにはわからなかったので関心を持った。

結果として，そのような立体を，図 1.1 と 図 1.2，図 1.3 （この PDF ドキュメントの 2 ページめ）の図形を普通のプリンターで（コンビニのプリントサービスなどでも？）印刷して，ハサミで切り取り，ノリで貼り合わせても作れることがわかった。

この立体そのものは図 1.1 の図形を適当な形に巻くだけでも再現できるはずだが，形状を整えるために図 1.2 の部品と組み合わせると良い。また，この立体は単独では直立できないが，図 1.3 に示す図形を巻いて円筒形状の足を作り，図 1.2 の部品と組み合わせると単独でも直立できる立体になる。

3D プリンターが使えなくてもできるのだから，Let’s（レッツ） try（トライ）！である。

2．考えかた

デカルト（直交）座標で先端の見た目の座標を X, Y, Z，実体での座標を x, y, z で表す。視点が XZ 平面上にあり，俯角の補角が Ψ で表されるとする（一般的な球面座標表示と合わせるために俯角そのものでなくその値を 90º から差し引いた値，補角を Ψ とする）。単純化のために円柱の見た目の太さ，正方柱の底面の対角線長は 2 とする。以降では，

$$C \equiv \cos\Psi \tag{2.1}$$

$$S \equiv \sin\Psi \tag{2.2}$$

とする。

**図 1.1　立体側面の展開図。破線部分は軽く谷折りにして，おりグセをつける。印刷面が内側になるように巻く。
赤・黒の太線に沿って切り取り，赤・黒の細線を目安にして，図 1.2 の部品にのり付けをしながら巻いて筒状にする。**

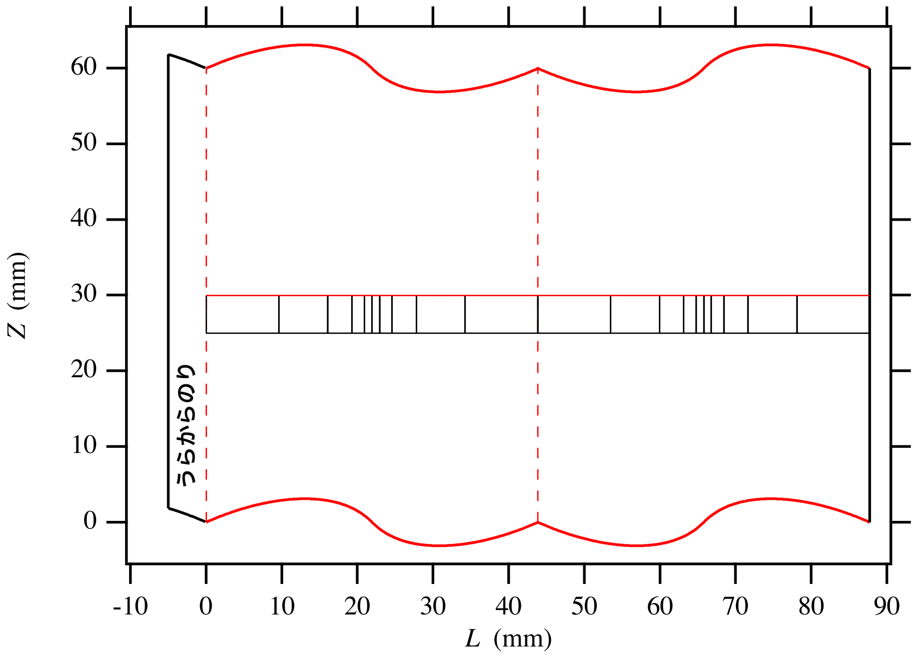


**図 1.2　立体の断面図（芯の部分）。黒太線に沿って切り取り，周囲ののりしろ部分は赤い太線に沿って 90° の角度で折り，図 1.1 の部品の目安位置に合わせてのりで貼り付ける。
青と黒の細線は図 1.3 の部品（足部）を取り付ける目安であるが，必ずしも正確に合わせる必要はない。のりしろ部を赤太線に沿って山折りにする場合，足部は裏側から最後に貼り付ければ良い。**

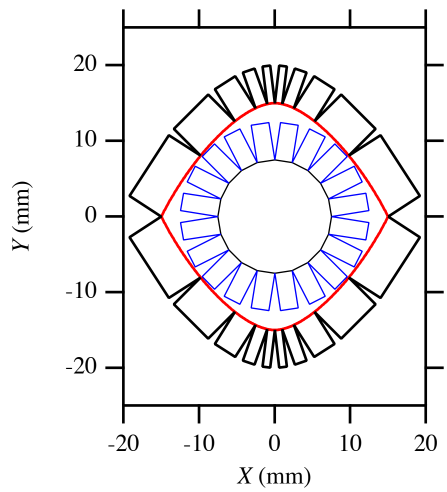
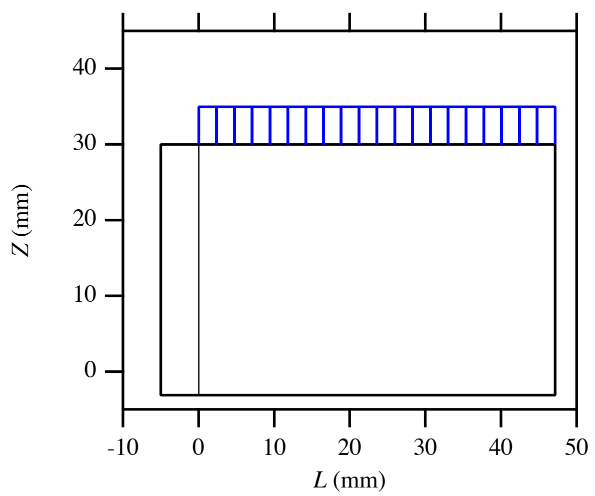


**図 1.3　立体を直立させるための円筒形状の足の部分の展開図。黒太線・青太線に沿って切り取り，青太線に沿って切り込みを入れてから巻いてのり付けする。
左右の端に近い切り込みは，所定の寸法に切り取ってからではハサミで作業しにくくなるので，はじめは左右に余白のついた状態に切り取り，切り込みを入れ終わってから，最後に左右の端を切り落とすだけで所定の寸法が得られるように作業すると良い。**



見た目の正方柱底面の２つの対角線が X 方向と Y 方向を向いている場合，Y 軸まわりに $\pm\Psi$ 回転させたときに，その底面は 水平方向の対角線の長さ 2，垂直方向の対角線の長さ $2C$ の菱形（ひしがた）に見えるはずである。また円柱の場合には水平方向の幅（長径） 2，垂直方向の幅（短径）$2C$ の楕円形（だえんけい）に見えるのだろう。これらの関係を満たすためには，実体の底面の輪郭は，向きを変えたときのそれぞれについて方程式：

$$\frac{\left|X\right|}{C} + \left|Y\right| = 1 \tag{2.3}$$

$$\frac{X^2}{C^2} + Y^2 = 1 \tag{2.4}$$

を満たせば良い。実体を Y 軸まわりに $\pm\Psi$ 回転させるとき

$$X = Cx \mp Sz \tag{2.5}$$

$$Y = y \tag{2.6}$$

$$Z = \pm Sx + Cz \tag{2.7}$$

となることから，式 (2.5)–(2.7) を式 (2.3), (2.4) に代入して，

$$\frac{\left|Cx - Sz\right|}{C} + \left|y\right| = 1 \tag{2.8}$$

$$\frac{(Sx + Cz)^2}{C^2} + y^2 = 1 \tag{2.9}$$

となるが，あらためて $T \equiv \tan\Psi = S/C$ とすれば，式 (1.8) と (1.9) は

$$\left|x - Tz\right| + \left|y\right| = 1 \tag{2.10}$$

$$(Tx + z)^2 + y^2 = 1 \tag{2.11}$$

と書き直せる。

あとは，式 (2.10), (2.11) の連立方程式を解けば，実体の底面の輪郭曲線を表す x, y, z の関係式が得られるのであろう。しかし，これをどのように解くべきかは悩ましい。

3．俯角 45° の特殊例

3−1　俯角 45° の特殊例，底面の方程式

俯角が 45° の場合， $T = 1$ となるので，計算が簡単になる。このとき，解くべき連立方程式は式 (2.10) と (2.11) から，

$$\left|x - z\right| + \left|y\right| = 1 \tag{3.1.1}$$

$$(x + z)^2 + y^2 = 1 \tag{3.1.2}$$

になる。場合分けには手間がかかるが，最大の次数が２だから，中学生でも少し頑張れば解けるはずの連立方程式である。

まず，$0 < y$ と限定することにすれば，式 (2.1) を

$$|x - z| + y = 1 \tag{3.1.3}$$

と書き直せる。

XZ 面を鏡映面（きょうえいめん）とする（その位置に鏡を置いて映すと同じ形に見える）対称性から，底面の形状に関して Y 軸に沿っては一定とみなして構わないだろうから，式 (3.1.3) から

$$y = 1 - |x - z| \tag{3.1.4}$$

として式 (3.1.2) に代入し，

$$\begin{aligned}
&(x + z)^2 + \left(1 - |x - z|\right)^2 = 1 \\
&\Rightarrow (x + z)^2 + 1 - 2\,|x - z| + (x - z)^2 = 1 \\
&\Rightarrow 2x^2 + 2z^2 - 2\,|x - z| = 0 \\
&\Rightarrow x^2 + z^2 - |x - z| = 0
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$x < z$ の時

$$\begin{aligned}
&x^2 + z^2 + x - z = 0 \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

となる。これは軸を $(x, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の位置に持つ半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円筒面である。

$z \le x$ の時

$$\begin{aligned}
&x^2 + z^2 - x + z = 0 \\
&\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

となる。これは軸を $(x, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ の位置に持つ半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円筒面の方程式である。

立体の底面は，図 3.1.1 の赤線で示すように，これら二つの円筒面を接続した形状となる。

まとめれば，

$$z = \begin{cases}
-\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{2} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2} & [0 \le x \le 1] \\
\dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{1}{2} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} & [-1 \le x < 0]
\end{cases} \tag{3.1.8}$$

となる。これが立体の底面を表す方程式である。

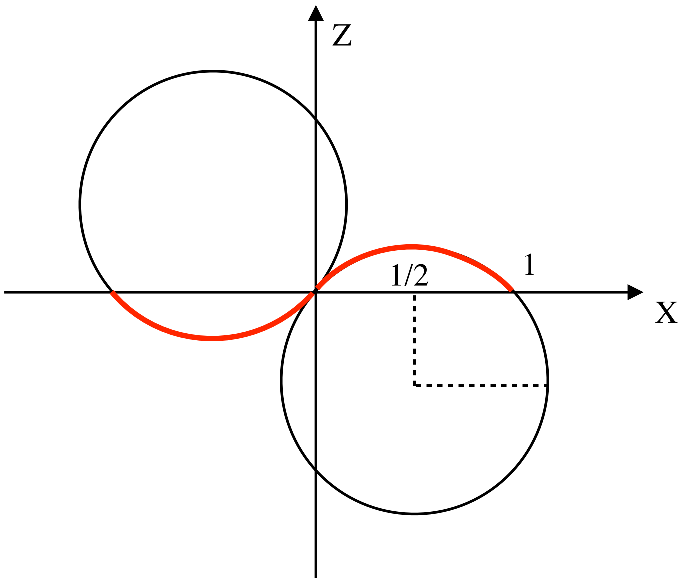


図 3.1.1　俯角 45° の場合の立体の底面の形状を +Y 方向から眺めた図形。

3−2　俯角 45° の特殊例，側面の方程式

式 (3.1.1), (3.1.2) の連立方程式から z を消去した形式を導けば，側面の方程式が得られる。$z < x$，$0 < y$ の領域に限定すれば，式 (3.1.1) は

$$\begin{aligned} & x - z + y = 1 \\ & \Rightarrow z = x + y - 1 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

と書き直せるので，これを式 (3.1.2) に代入し，

$$\begin{aligned} & (2x + y - 1)^2 + y^2 = 1 \\ & \Rightarrow 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 4x - 2y + y^2 = 1 \\ & \Rightarrow 4x^2 + 2y^2 + 4xy - 4x - 2y = 0 \\ & \Rightarrow 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x - y = 0 \\ & \Rightarrow y^2 + (2x - 1)\,y + 2x^2 - 2x = 0 \\ & \Rightarrow \left(y + x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2x^2 - 2x = 0 \\ & \Rightarrow \left(y + x - \frac{1}{2}\right)^2 - x^2 + x - \frac{1}{4} + 2x^2 - 2x = 0 \\ & \Rightarrow \left(y + x - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - x - \frac{1}{4} = 0 \\ & \Rightarrow y = -x + \frac{1}{2} + \sqrt{-x^2 + x + \frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

となる。この立体の側面は（２つの底面での打ち切りを度外視すれば） XZ 面と YZ 面を鏡映面とする対称性を持つので，一般的に

$$y = \mp |x| \pm \frac{1}{2} \pm \sqrt{-x^2 + |x| + \frac{1}{4}} \qquad \left[-1 \le x \le 1\right] \tag{3.2.3}$$

と書ける。

式 (3.1.8), (3.2.3) の形式を導いたことで，3D プリンターを使うのであれば，目的は達成されたことになると思われる。ただ，ここで，実体の側面が４つの楕円柱側面を組み合わせたものになることを確認しておきたい。式 (3.2.2) は立体上では $\left[0 \le x \le 1\right]$ の範囲にのみあてはまるが，延長すれば

$$y = -x + \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \tag{2.2.4}$$

となり $\left[1/2 - 1/\sqrt{2} \le x \le 1/2 + 1/\sqrt{2}\right]$ の範囲にわたる。3D プリンターを利用した実体の作製とは関係ないとしても，幾何学的な構成要素がどのようなものであるかは気になる。

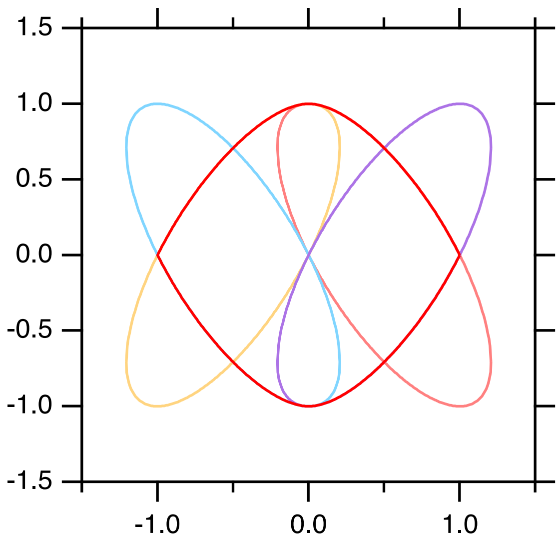


図 3.2.1 俯角45° の場合，立体の側面（太い赤線）とそれを構成する構成する４楕円柱の関係

$x = cX - sY$，$y = sX + cY$として式 (3.2.2) の４番目の式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&2(cX - sY)^2 + (sX + cY)^2 + 2(cX - sY)(sX + cY) - 2(cX - sY) - (sX + cY) = 0 \\
&\Rightarrow 2c^2X^2 - 4scXY + s^2Y^2 + s^2X^2 + 2scXY + c^2Y^2 \\
&\qquad +2scX^2 - s^2XY + c^2XY - 2scY^2 - 2cX + 2sY - sX + cY = 0 \\
&\Rightarrow (2c^2 + s^2 + 2sc)X^2 + (-2sc - s^2 + c^2)XY \\
&\qquad +(s^2 + c^2 - 2sc)Y^2 + (-2c - s)X + (2s + c)Y = 0
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

となることから，

$$-2sc - s^2 + c^2 = 0 \tag{3.2.6}$$

の関係が成立すれば式 (3.2.5) の交差項（XYに比例する項）が消える。$c \equiv \cos\alpha$, $s \equiv \sin\alpha$ とすれば，式 (3.2.6) は

$$\begin{aligned}
&-2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0\\
&\Rightarrow \sin 2\alpha = \cos 2\alpha\\
&\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} = 22.5^\circ
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

と同じことになる。また，式 (3.2.6) から，

$$\begin{aligned}
&-2s\sqrt{1-s^2} - s^2 + 1 - s^2 = 0\\
&\Rightarrow 1 - 2s^2 = 2s\sqrt{1-s^2} \Rightarrow 1 - 4s^2 + 4s^4 = 4s^2(1-s^2) \Rightarrow 1 - 8s^2 + 8s^4 = 0\\
&\Rightarrow s^4 - s^2 + 1/8 = 0\\
&\Rightarrow s^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

となる。このとき

$$c^2 = 1 - s^2 = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{3.2.9}$$

となる。$c \equiv \cos\Phi$，$s \equiv \sin\Phi$ とすれば,

$$\cos 2\Phi = c^2 - s^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.2.10}$$

$$\Rightarrow 2\Phi = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \Phi = \frac{3\pi}{8} \tag{3.2.11}$$

とすれば,

$$\begin{aligned}
c = \cos\frac{3\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 0.382683
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$$s = \sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = 0.92388 \tag{3.2.13}$$

式 (3.2.5) 中の X^2 の係数について,

$$2c^2 + s^2 + 2sc = 1 + c^2 + 2sc = 1 + c^2 + 2sc = 1 + \frac{1}{2\left(2+\sqrt{2}\right)} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 1 + \frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6+\sqrt{2}}{4} = 1.85355 \tag{3.2.14}$$

Y^2 の係数について

$$s^2 + c^2 - 2sc = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75 \tag{3.2.15}$$

X の係数について，

$$-2c - s = -\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4-2}} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$= -\sqrt{2-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = -1.68925 \tag{3.2.16}$$

Y の係数について，

$$2s + c = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)+1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2.23044 \tag{3.2.17}$$

となる。したがって数値的に式 (3.2.5) を表現すれば，

$$1.85355X^2 + 0.75Y^2 - 1.68925X + 2.23044Y = 0$$

$$\Rightarrow 1.85355\left(X - 0.45568\right)^2 + 0.75\left(Y + 1.48696\right)^2 = 2.04317$$

$$\Rightarrow \frac{\left(X - 0.45568\right)^2}{1.04991^2} + \frac{\left(Y + 1.48696\right)^2}{1.65052^2} = 1 \tag{3.2.18}$$

となる。$z < x$，$0 < y$ の領域では，立体の側面は，Y 軸方向に沿って長径 1.65052，X 軸方向に沿って短径 1.04991 の楕円面を Z 軸の周りに 22.5º 回転させた図形（図 3.2.1 の薄赤線）であることがわかる。

図 3.2.2 に立体の投影図を示す。紙の筒でこの立体を作る場合，奥の上の縁(ふち)から 2 の深さまで，手前の縁(ふち)の上から見通せることがわかる。図 1.2 のような芯を立体の半分の高さの位置に取り付ける場合，これが隠れるようにするには，立体の高さは 4 以上でなければいけないことになる。図 1.1 では，立体の高さを半径の 4 倍になるようにした。

この場合，俯角を変えたときに，ちょうど芯の部分の見えはじめる角度が俯角 45º になるので，このことを利用して見る角度（カメラの角度）を調整できる。

また，円筒形の足をつける場合，足が紙筒の下側の縁で完全に隠れるためには，円筒の半径が 0.5 以下でなければいけないこともわかる。図 1.3 に示した足の展開図は，半径が 0.5 となるように決めたものである。

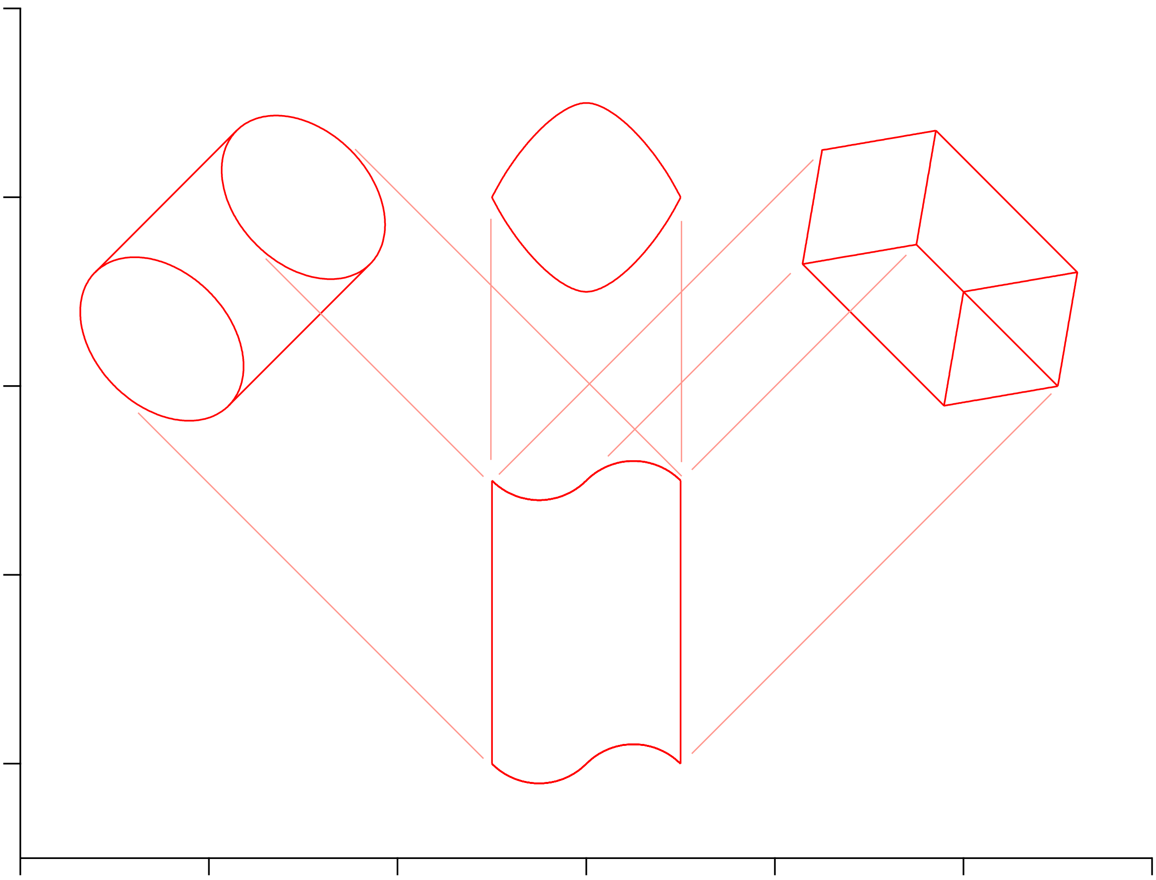


図 3.2.2　俯角 45° の場合の立体の投影図

3–3　俯角 45° の特殊例，展開図

3–3–1　展開図を作る考え方

紙筒で立体の側面を作る場合に，紙をどのように切り出せば良いかについて考える。

$$y = f(x)$$

（z は任意）の形式で側面の方程式が与えられている場合，この側面上の X 方向の位置を x から $x + \mathrm{d}x$ まで変化させた時に，側面上で水平方向に沿って進む距離は

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{3.3.1}$$

であり，式 (3.2.2) から

$$y = -x + \frac{1}{2} + \sqrt{-x^2 + x + \frac{1}{4}} \tag{3.3.2}$$

だから

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 + \frac{1}{2}(-2x+1)\left(-x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^{-1/2} \tag{3.3.3}$$

$$\int_{l_{\min}}^{l_{\max}} \mathrm{d}l = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{3.3.4}$$

となる。この式の解析的な解が得られるかはわからないが，このことは実用的には大きな問題ではない。オイラー Euler 法と呼ばれる方法で数値積分をすれば，数値的な解は得られる。

３−３−２　オイラー法による数値積分

オイラー法を使って式 (3.3.4) を解くためには，$l_0 = 0$ から出発して，

$$l_{j+1} = l_j + \sqrt{\left(y_{j+1} - y_j\right)^2 + \left(x_{j+1} - x_j\right)^2} \tag{3.3.5}$$

として，逐次 $\left\{l_j\right\}$ の値を求めれば良いだけである。結果として得られる $\left\{l_j, z_j\right\}$ が展開図側面の曲線部分を表す数値になる。

断面の形状は $\left\{x_j, y_j\right\}$ で表されることから，以下のような計算法を用いる。

$N \leftarrow 300$（分割数）

$R \leftarrow 15$（出来上がりの半径・半対角線長さ，単位 mm）

$\Delta x \leftarrow 1/N$（刻みの大きさ，無名数）

$x_0 \leftarrow 1$，$l_0 \leftarrow 0$（初期値）

$y_0 \leftarrow -x_0 + 0.5 + \sqrt{-x_0^2 + x_0 + 0.25}$（式 (2.28)）

$z_0 \leftarrow x_0 + y_0 - 1$（式 (2.9)）

$X_0 \leftarrow Rx_0$，$Y_0 \leftarrow Ry_0$，$Z_0 \leftarrow Rz_0$，$L_0 \leftarrow Rl_0$（実座標値，単位 mm）

$x_1 \leftarrow x_0 - \Delta x$

$y_1 \leftarrow -x_1 + 0.5 + \sqrt{-x_1^2 + x_1 + 0.25}$（式 (2.28)）

$z_1 \leftarrow x_1 + y_1 - 1$（式 (2.9)）

$l_1 = l_0 + \sqrt{\left(y_1 - y_0\right)^2 + \left(x_1 - x_0\right)^2}$（式(2.31)）

$X_1 \leftarrow Rx_1$，$Y_1 \leftarrow Ry_1$，$Z_1 \leftarrow Rz_1$，$L_1 \leftarrow Rl_1$（実座標値，単位 mm）

…

$x_N \leftarrow x_{N-1} - \Delta x$

$y_N \leftarrow -x_N + 0.5 + \sqrt{-x_N^2 + x_N + 0.25}$（式 (2.28)）

$z_N \leftarrow x_N + y_N - 1$（式 (2.9)）

$l_N = l_{N-1} + \sqrt{\left(y_N - y_{N-1}\right)^2 + \left(x_N - x_{N-1}\right)^2}$（式(2.31)）

$X_N \leftarrow Rx_N$，$Y_N \leftarrow Ry_N$，$Z_N \leftarrow Rz_N$，$L_N \leftarrow Rl_N$（実座標値，単位 mm）

$X_{N+1} \leftarrow -X_{N-1}$（対称性から）

$Y_{N+1} \leftarrow Y_{N-1}$（対称性から）

$L_{N+1} \leftarrow 2L_N - L_{N-1}$（対称性から）

$Z_{N+1} \leftarrow -Z_{N-1}$（対称性から）

…

$X_{2N} \leftarrow X_0$（対称性から）

$Y_{2N} \leftarrow Y_0$（対称性から）

$L_{2N} \leftarrow 2L_N - L_0$（対称性から）

$Z_{2N} \leftarrow Z_0$（対称性から）

$X_{2N+1} \leftarrow -X_1$（対称性から）

$Y_{2N+1} \leftarrow -Y_1$（対称性から）

$Z_{2N+1} \leftarrow 2Z_{2N} - Z_1$（対称性から）

$L_{2N+1} \leftarrow L_{2N} + L_1$（対称性から）

…

$X_{2N+i} \leftarrow -X_i$（対称性から）

$Y_{2N+i} \leftarrow -Y_i$（対称性から）

$Z_{2N+i} \leftarrow 2Z_{2N} - Z_i$（対称性から）

$L_{2N+i} \leftarrow L_{2N} + L_i$（対称性から）

…

$X_{4N} \leftarrow -X_0$（対称性から）

$Y_{4N} \leftarrow -Y_0$（対称性から）

$$L_{4N} \leftarrow 2L_{2N}$$（対称性から）

$$Z_{4N} \leftarrow Z_0$$（対称性から）

このような手続きで得られる側面展開図 (L, Z) を 図1.1 に，断面図 (X, Y) を 図 1.2 に，赤い太線として示した。

紙の筒で目的の形状を保つためには，ハサミで 図 1.2 の断面図の通りに紙を切り取って，図 1.1 の，断面形状を保つための芯として使うと良い。

３−３−３　断面の折り返し部

紙を折る操作では，本来は曲線の部分を完全には再現できない。断面の端を折り返して芯として使う場合に，特に曲がりの強い部分では切れ込みの間隔を短めにしないと形が崩れる。断面を，$4M$ 個の頂点を持つ多角形で近似することとして，最適な切れ込み位置を求めることについて考える。

対称性から，四分の一周だけを考えて，これを M 分割すれば良い。前の計算の結果から，四分の一周は，実際には $\left(X_0, Y_0\right), \cdots,$ $\left(X_N, Y_N\right)$ の $(N+1)$ 個の点を繋いだ折れ線で表される。この範囲で $(M-1)$ 個の分割点 $\left(X_{i_1}, Y_{i_1}\right), \cdots,$ $\left(X_{i_{M-1}}, Y_{i_{M-1}}\right)$ を選び，M 個の折り返し部分を作る。また$\left(X_{i_0}, Y_{i_0}\right) = \left(X_0, Y_0\right)$，$\left(X_{i_M}, Y_{i_M}\right) = \left(X_N, Y_N\right)$ とする。

各標本点 $\left(X_0, Y_0\right), \cdots,$ $\left(X_N, Y_N\right)$ について，周の接線に対する近似的な法線の方向は求まるので，この法線方向のなす角度が等間隔になるように切れ目の位置を決める。前節で求めたケースの場合，$\left(X_0, Y_0\right)$ での法線方向の角度は，

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0} = 0.464976 \text{ rad} = 26.64^\circ$$

であり，$\left(X_N, Y_N\right)$ での 法線方向の角度は，対称性から

$$\varphi_N = \frac{\pi}{2} = 1.5708 \text{ rad} = 90^\circ$$

である。また，$i = 1, \cdots, N-1$ の標本点での法線方向の角度は

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{X_{i+1} - X_0}$$

により求まる。$(M-1)$ 個の分割点の法線方向の角度は，

$$\varphi_{i_j} \simeq \frac{\left(M-j\right)\varphi_0 + j\varphi_N}{M} \quad \left(j = 1, \cdots, M-1\right)$$

となるように選べば良い。図 1.2 の折り返し部の切れ込みの位置は，そのように決めたものである。確かに曲率の強いところでは細かく，曲率の強くないところでは粗い間隔が得られている。

４．一般的な俯角の場合

４−１　一般的な俯角の場合の底面の方程式

解くべき方程式は

$$\left|x - Tz\right| + \left|y\right| = 1 \tag{1.10}$$

$$(Tx + z)^2 + y^2 = 1 \tag{1.11}$$

である。

$0 < y$ と限定して，式 (1.10) を

$$y = 1 - \left|x - Tz\right| \tag{4.1}$$

と書き直し，式 (1.11) に代入し，

$$\begin{aligned}
&(Tx + z)^2 + \left(1 - \left|x - Tz\right|\right)^2 = 1 \\
&\Rightarrow (Tx + z)^2 + 1 - 2\left|x - Tz\right| + (x - Tz)^2 = 1 \\
&\Rightarrow \left(1 + T^2\right)x^2 + \left(1 + T^2\right)z^2 - 2\left|x - Tz\right| = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$x < Tz$ の時

$$\begin{aligned}
&x^2 + z^2 + \frac{2(x - Tz)}{1 + T^2} = 0 \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{1}{1 + T^2}\right)^2 + \left(z - \frac{T}{1 + T^2}\right)^2 = \frac{1}{\left(1 + T^2\right)^2} + \frac{T^2}{\left(1 + T^2\right)^2} = \frac{1}{1 + T^2} \\
&\Rightarrow z = \frac{T}{1 + T^2} - \sqrt{\frac{1}{1 + T^2} - \left(x + \frac{1}{1 + T^2}\right)^2}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。これは軸を $(x, z) = \left(-\frac{1}{1 + T^2}, \frac{T}{1 + T^2}\right)$ の位置に持つ半径 $\frac{1}{\sqrt{1 + T^2}}$ の円筒面である。

$Tz \leq x$ の時

$$\begin{aligned}
&x^2 + z^2 - \frac{2(x - Tz)}{1 + T^2} = 0 \\
&\Rightarrow \left(x - \frac{1}{1 + T^2}\right)^2 + \left(z + \frac{T}{1 + T^2}\right)^2 = \frac{1}{1 + T^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{T}{1+T^2} + \sqrt{\frac{1}{1+T^2} - \left(x - \frac{1}{1+T}\right)^2} \tag{4.4}$$

となる。これは軸を $(x,z) = \left(\frac{1}{1+T^2}, -\frac{T}{1+T^2}\right)$ の位置に持つ半径 $\frac{1}{\sqrt{1+T^2}}$ の円筒面の方程式ということになるだろう。

立体の底面は，これら二つの円筒面を接続した形状となる。まとめれば，

$$z = \begin{cases} \frac{T}{1+T^2} - \sqrt{\frac{1}{1+T^2} - \left(x + \frac{1}{1+T}\right)^2} & [x \leq Tz] \\ -\frac{T}{1+T^2} + \sqrt{\frac{1}{1+T^2} - \left(x - \frac{1}{1+T}\right)^2} & [Tz \leq x] \end{cases} \tag{4.5}$$

4−2　一般的な俯角の場合の側面の方程式

式 (1.10), (1.11) の連立方程式から z を消去した形式を導けば，側面の方程式が得られる。$Tz < x$，$0 < y$ の領域に限定すれば，式 (3.1) は

$$\begin{aligned} & x - Tz + y = 1 \\ & \Rightarrow z = \frac{x+y-1}{T} \end{aligned} \tag{4.6}$$

と書き直せるので，これを式 (1.11) に代入し，

$$\begin{aligned}
& \left(Tx + \frac{x+y-1}{T}\right)^2 + y^2 = 1 \\
& \Rightarrow \left[\left(T + \frac{1}{T}\right)x + \frac{y}{T} - \frac{1}{T}\right]^2 + y^2 = 1 \\
& \Rightarrow \left[\left(1+T^2\right)x + y - 1\right]^2 + T^2y^2 = T^2 \\
& \Rightarrow \left(1+T^2\right)^2 x^2 + y^2 + 1 + 2\left(1+T^2\right)xy - 2\left(1+T^2\right)x - 2y + T^2y^2 = T^2 \\
& \Rightarrow \left(1+T^2\right)^2 x^2 + \left(1+T^2\right)y^2 + 2\left(1+T^2\right)xy - 2\left(1+T^2\right)x - 2y = T^2 - 1 \\
& \Rightarrow \left(1+T^2\right)x^2 + y^2 + 2xy - 2x - \frac{2y}{1+T^2} = \frac{T^2-1}{1+T^2} \\
& \Rightarrow y^2 + 2xy - \frac{2y}{1+T^2} + \left(1+T^2\right)x^2 - 2x = \frac{T^2-1}{1+T^2} \\
& \Rightarrow y^2 + 2\left(x - \frac{1}{1+T^2}\right)y + \left(1+T^2\right)x^2 - 2x = \frac{T^2-1}{1+T^2} \\
& \Rightarrow \left(y + x - \frac{1}{1+T^2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{1+T^2}\right)^2 + \left(1+T^2\right)x^2 - 2x = \frac{T^2-1}{1+T^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(y+x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 -x^2+\frac{2x}{1+T^2}-\frac{1}{\left(1+T^2\right)^2}+\left(1+T^2\right)x^2-2x = \frac{T^2-1}{1+T^2}$$

$$\Rightarrow \left(y+x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 +T^2x^2-\frac{2T^2x}{1+T^2} = \frac{T^4}{\left(1+T^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(y+x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 +T^2\left(x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 - \frac{T^2}{\left(1+T^2\right)^2} = \frac{T^4}{\left(1+T^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(y+x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 +T^2\left(x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 = \frac{T^2}{1+T^2}$$

$$\Rightarrow \left(y+x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 +T^2\left(x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 - \frac{T^2}{1+T^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(y+x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 = \frac{T^2}{1+T^2} - T^2\left(x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow y = -x+\frac{1}{1+T^2}+T\sqrt{\frac{1}{1+T^2}-\left(x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2} \tag{4.7}$$

$y=0$ となるときの x の値は

$$\left(x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 +T^2\left(x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 = \frac{T^2}{1+T^2}$$

$$\Rightarrow \left(1+T^2\right)\left(x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 = \frac{T^2}{1+T^2}$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{1+T^2}\right)^2 = \frac{T^2}{\left(1+T^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{1+T^2} \pm \frac{T}{1+T^2} \tag{4.8}$$

側面は XZ 面と YZ 面を鏡映面とする対称性を持つので，一般的に

$$y = \mp |x| \pm \frac{1}{1+T^2} \pm T\sqrt{\frac{1}{1+T^2}-\left(|x|-\frac{1}{1+T^2}\right)^2}$$
$$\left[\frac{1-T}{1+T^2} \le |x| \le \frac{1+T}{1+T^2}\right] \tag{4.9}$$

と書ける。

式 (4.5), (4.9) の形式を導いたことで目的は達成された。

式 (4.7) は立体上では $\left[0 \le x \le \dfrac{1+T}{1+T^2}\right]$ の範囲のみあてはまるが，延長すれば

$$y = -x + \frac{1}{1+T^2} \pm T\sqrt{\frac{1}{1+T^2} - \left(x - \frac{1}{1+T^2}\right)^2} \tag{4.10}$$

となり $\left[\dfrac{1}{1+T^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1+T^2}} \leq x \leq \dfrac{1}{1+T^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1+T^2}}\right]$ の範囲にわたる。